Modelowanie i Analiza Systemów Informatycznych

Logika Temporalna i Automaty Czasowe

(2)

Logika LTL

© Paweł Głuchowski, Politechnika Wrocławska

wersja 2.1

Treść wykładu

Charakterystyka logiki LTL

- Czas w Linear Temporal Logic (LTL)
- Do czego można zastosować LTL?

Treść wykładu

Składnia i semantyka

- Struktura czasowa (struktura Kripkego)
- Podstawowe operatory temporalne
- Pochodne operatory temporalne
- Kolejność priorytetów operatorów i spójników logicznych

Treść wykładu

Przykładowe prawa

- Dualność operatorów
- Dualność par operatorów
- Przestawność operatora X
- Idempotencja (duplikacja/redukcja) operatorów
- Rozdzielność operatorów temporalnych względem spójników logicznych
- Charakterystyka stałego punktu
- Pewne istotne implikacje

Treść wykładu

Przykładowe formuły

- Przykłady
- Ćwiczenia

Charakterystyka logiki LTL

- Czas w Linear Temporal Logic (LTL)
- Do czego można zastosować LTL?

Charakterystyka logiki LTL

Czas w Linear Temporal Logic (LTL)

- Czas jest: punktowy, liniowy, lewostronnie skończony (nieograniczony od „teraźniejszego” momentu do przyszłości).

Do czego można zastosować LTL?

- do opisu i analizy deterministycznych:
  - algorytmów,
  - właściwości niedeterministycznych algorytmów;
- gdzie nie ma różnych wariantów przepływu czasu.

Składnia i semantyka

- Struktura czasowa (struktura Kripkego)
- Podstawowe operatory temporalne
- Pochodne operatory temporalne
- Kolejność operatorów i spójników

Składnia i semantyka

Struktura czasowa (struktura Kripkego)

M = (S,x,L)

S — zbiór stanów (stany reprezentują momenty): $s_0, s_1, s_2, \ldots \in S$

x — nieskończona ścieżka (sekwencja) stanów: $x = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$

L — etykietowanie każdego stanu zbiorem wyrażeń atomowych *WA* które są prawdziwe w tym stanie: $L: S \times WA \rightarrow \{prawda, fałsz\}$

$M,x \models p$ znaczy, że wyrażenie *p* jest prawdziwe w M na ścieżce x.

$M,s_i \models p$ znaczy, że wyrażenie *p* jest prawdziwe w M w stanie s_i.

Składnia i semantyka

Struktura czasowa (struktura Kripkego)

Niech *WA* będzie zbiorem wyrażeń atomowych; niech $i \in \{0,1,...\}$.

Formułę generuje się wg reguł S1, S2 i S3:

S1: każde wyrażenie $p \in WA$ jest formułą:

$s_i \models p$ jeśli $L(s_i,p) = prawda$

S2: jeśli p i q są formułami, to $p \wedge q$ i $\neg p$ też są formułami:

$s_i \models p \wedge q$ jeśli $s_i \models p$ i $s_i \models q$ $\qquad$ $s_i \models \neg p$ jeśli nie $s_i \models p$

S3: jeśli p i q są formułami, to pUq i Xp też są formułami:

$s_i \models (pUq)$ jeśli $(\exists k \geq i)\ ((s_k \models q) \wedge (\forall j,\ i \leq j < k)(s_j \models p))$

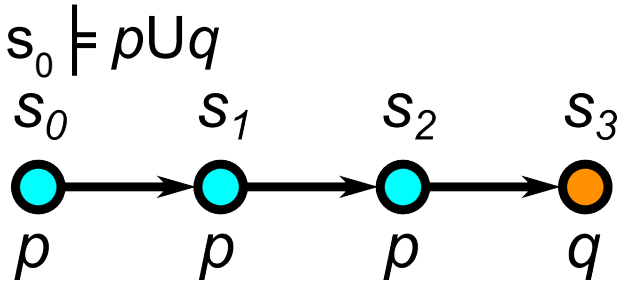
$s_i \models Xp$ jeśli $s_{i+1} \models p$

Składnia i semantyka

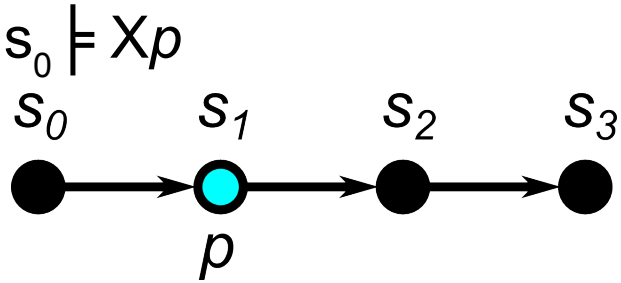
Operatory temporalne pozwalają przypisywać wyrażeniom wartość *prawda* / *fałsz* w strukturze czasowej.

Podstawowe operatory temporalne

- **U** („dopóki”) — pUq znaczy, że q jest prawdziwe w pewnym momencie; jeśli to przyszły moment, to w każdym wcześniejszym momencie p jest prawdziwe.



- **X** („następnie”) — Xp znaczy,że p jest prawdziwe w następnym momencie.



niebieski punkt: $s_i \models p$,
pomarańczowy punkt: $s_i \models q$,
czarny punkt: $s_i \models$ *prawda* (brak informacji o prawdziwości p i q)

Składnia i semantyka

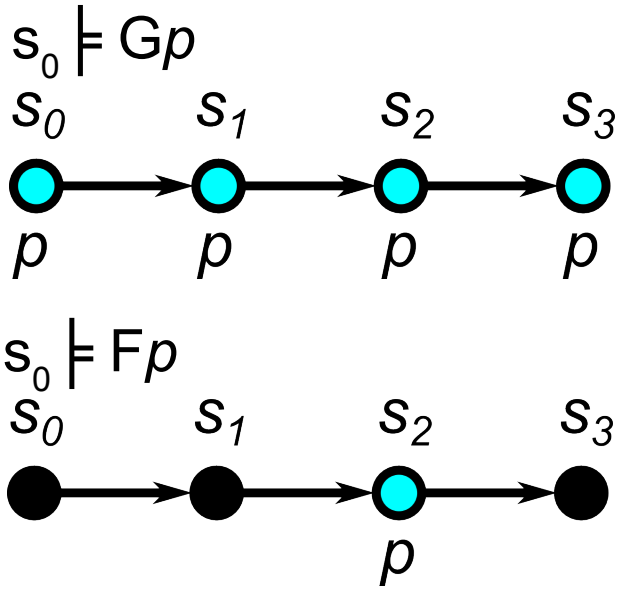
Pochodne operatory temporalne

- **G** („zawsze”) — G*p* znaczy, że *p* jest prawdziwe w każdym momencie:

  $Gp \equiv p \; U \; \textit{fałsz}$

- **F** („kiedyś”) — F*p* znaczy, że *p* jest prawdziwe w pewnym momencie:

  $Fp \equiv \textit{prawda} \; U \; p$



niebieski punkt: $s_i \models p$,
czarny punkt: $s_i \models \textit{prawda}$

Zamiast symboli X, G i F następujące symbole są często używane: ○, □ i ◊.

Składnia i semantyka

Kolejność operatorów i spójników

Operatory temporalne i spójniki logiczne wg siły sklejania:
(im niżej, tym większa siła)

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$

$\wedge \vee$

U

$\neg$XGF

Składnia i semantyka

Kolejność operatorów i spójników

Przykład:

$\mathrm{G}p \vee \neg\mathrm{F}q \Rightarrow \mathrm{G}p \wedge q \Leftrightarrow \mathrm{FG}r$	to: $(\mathrm{G}p \vee \neg\mathrm{F}q \Rightarrow \mathrm{G}p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathrm{FG}r)$
$\mathrm{G}p \vee \neg\mathrm{F}q \Rightarrow \mathrm{G}p \wedge q$	to: $(\mathrm{G}p \vee \neg\mathrm{F}q) \Rightarrow (\mathrm{G}p \wedge q)$
$\mathrm{G}p \vee \neg\mathrm{F}q$	to: $(\mathrm{G}p) \vee (\neg\mathrm{F}q)$
$\neg\mathrm{F}q$	to: $\neg(\mathrm{F}q)$
$\mathrm{G}p \wedge q$	to: $(\mathrm{G}p) \wedge (q)$
$\mathrm{F}q$	to: $\mathrm{F}(q)$
$\mathrm{G}p$	to: $\mathrm{G}(p)$

$$(((\mathrm{G}(p)) \vee (\neg(\mathrm{F}(q)))) \Rightarrow ((\mathrm{G}(p)) \wedge (q))) \Leftrightarrow (\mathrm{F}(\mathrm{G}(r)))$$

Przykładowe prawa

- Dualność operatorów
- Dualność par operatorów
- Przestawność operatora X
- Idempotencja (duplikacja/redukcja) operatorów
- Rozdzielność operatorów temporalnych względem spójników logicznych
- Charakterystyka stałego punktu
- Pewne istotne implikacje

Przykładowe prawa

Dualność operatorów

- $Gp \Leftrightarrow \neg F \neg p$ (w każdym momencie p)
  $\Leftrightarrow$ (nie prawda, że w pewnym momencie $\neg p$)

- $Fp \Leftrightarrow \neg G \neg p$ (w pewnym momencie p)
  $\Leftrightarrow$ (nie prawda, że w każdym momencie $\neg p$)

- $X\neg p \Leftrightarrow \neg Xp$ (w następnym momencie $\neg p$)
  $\Leftrightarrow$ (nie prawda, że w następnym momencie p)

Przykładowe prawa

Dualność par operatorów

- $GF\neg p \Leftrightarrow \neg FGp$ (od każdego momentu:
  w pewnym momencie $\neg p$)
  $\Leftrightarrow$ (nie prawda, że od pewnego momentu:
  w każdym momencie p)

- $FG\neg p \Leftrightarrow \neg GFp$ (od pewnego momentu:
  w każdym momencie $\neg p$)
  $\Leftrightarrow$ (nie prawda, że od każdego momentu:
  w pewnym momencie p)

Przykładowe prawa

Przestawność operatora X

- $GXp \Leftrightarrow XGp$ (od każdego momentu:
  w następnym momencie p)
  $\Leftrightarrow$ (od następnego momentu:
  w każdym momencie p)

- $FXp \Leftrightarrow XFp$ (od pewnego momentu:
  w następnym momencie p)
  $\Leftrightarrow$ (od następnego momentu:
  w pewnym momencie p)

Przykładowe prawa

Idempotencja (duplikacja/redukcja) operatorów

- $\mathrm{GG}p \Leftrightarrow \mathrm{G}p$
- $\mathrm{FF}p \Leftrightarrow \mathrm{F}p$
- $p\mathrm{U}(p\mathrm{U}q) \Leftrightarrow p\mathrm{U}q$
- $(p\mathrm{U}q)\mathrm{U}q \Leftrightarrow p\mathrm{U}q$
- $\mathrm{GFGF}p \Leftrightarrow \mathrm{GF}p$
- $\mathrm{FGFG}p \Leftrightarrow \mathrm{FG}p$

Przykładowe prawa

Rozdzielność operatorów temporalnych względem spójników logicznych

- $\mathsf{F}(p \vee q) \Leftrightarrow \mathsf{F}p \vee \mathsf{F}q$
- $\mathsf{F}(p \wedge q) \Rightarrow \mathsf{F}p \wedge \mathsf{F}q$

- $\mathsf{G}(p \wedge q) \Leftrightarrow \mathsf{G}p \wedge \mathsf{G}q$
- $\mathsf{G}p \vee \mathsf{G}q \Rightarrow \mathsf{G}(p \vee q)$

Przykładowe prawa

Rozdzielność operatorów temporalnych względem spójników logicznych

- $X(p \wedge q) \Leftrightarrow Xp \wedge Xq$
- $X(p \vee q) \Leftrightarrow Xp \vee Xq$
- $X(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow Xp \Rightarrow Xq$
- $X(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (Xp \Leftrightarrow Xq)$

Przykładowe prawa

Rozdzielność operatorów temporalnych względem spójników logicznych

- $(p \wedge q) \mathrm{U} r \Leftrightarrow (p \mathrm{U} r) \wedge (q \mathrm{U} r)$
  (w pewnym momencie r, a wcześniej stale $p \wedge q$ jest prawdziwe)
  $\Leftrightarrow$
  (w pewnym momencie r, a wcześniej stale: p jest prawdziwe;
  i w pewnym momencie r, a wcześniej stale: q jest prawdziwe)
- $p \mathrm{U} (q \vee r) \Leftrightarrow (p \mathrm{U} q) \vee (p \mathrm{U} r)$
  (w pewnym momencie $q \vee r$, a wcześniej stale p jest prawdziwe)
  $\Leftrightarrow$
  (w pewnym momencie q, a wcześniej stale p jest prawdziwe;
  lub w pewnym momencie r,a wcześniej stale p jest prawdziwe)

Przykładowe prawa

Charakterystyka stałego punktu

Wyodrębnienie „początkowego” stanu.

- $\mathrm{F}p \Leftrightarrow p \vee \mathrm{XF}p$
- $\mathrm{G}p \Leftrightarrow p \wedge \mathrm{XG}p$
- $p\mathrm{U}q \Leftrightarrow q \vee (p \wedge \mathrm{X}(p\mathrm{U}q))$

Przykładowe prawa

Pewne istotne implikacje

- $p \Rightarrow \mathrm{F}p$ (teraz p) $\Rightarrow$ (w pewnym momencie p)
- $\mathrm{X}p \Rightarrow \mathrm{F}p$ (w następnym momencie p) $\Rightarrow$ (w pewnym momencie p)
- $\mathrm{G}p \Rightarrow \mathrm{F}p$ (w każdym momencie p) $\Rightarrow$ (w pewnym momencie p)
- $\mathrm{G}p \Rightarrow p$ (w każdym momencie p) $\Rightarrow$ (teraz p)
- $\mathrm{FG}p \Rightarrow \mathrm{GF}p$ (od pewnego momentu: w każdym momencie p) $\Rightarrow$ (od każdego momentu: w pewnym momencie p)
- $p\mathrm{U}q \Rightarrow \mathrm{F}q$ (w pewnym momencie q, a wcześniej stale jest p) $\Rightarrow$ (w pewnym momencie q)

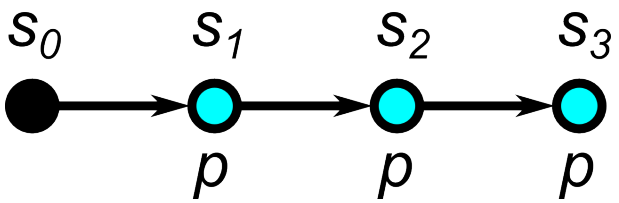
Przykładowe formuły

- Przykłady
- Ćwiczenia

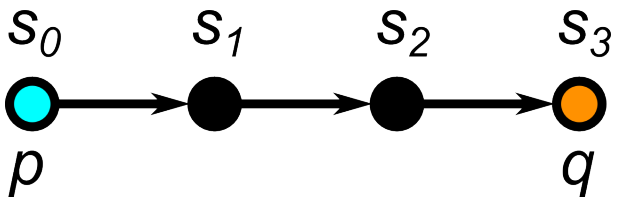
Przykładowe formuły

Przykłady

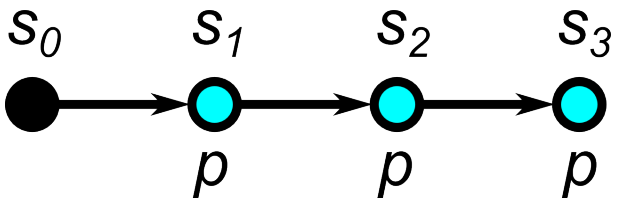
- $s_0 \models FGp$
  – od pewnego momentu: w każdym momencie *p*.



- $s_0 \models p \wedge (p \Rightarrow Fq)$
  – teraz *p* i, jeśli teraz *p*, to w pewnym momencie *q*.



- $s_0 \models Xp \wedge G(p \Rightarrow Gp)$
  – następnie *p* i w każdym momencie: jeśli jest *p*, to *p* jest w każdym kolejnym momencie.



niebieski punkt: $s_i \models p$,
pomarańczowy punkt: $s_i \models q$,
czarny punkt: $s_i \models$ *prawda*

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 1.

Które formuły są równoważne formule $p \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{X}p)$?

- $\mathrm{G}p$
- $p \wedge \mathrm{XG}p$
- $p \wedge \mathrm{GX}p$
- $p\mathrm{U}p$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 1.

Które formuły są równoważne formule $p \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{X}p)$?

- $\mathrm{G}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{XG}p$
- $p \wedge \mathrm{GX}p$
- $p\mathrm{U}p$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 1.

Które formuły są równoważne formule $p \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{X}p)$?

- $\mathrm{G}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{XG}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{GX}p$
- $p\mathrm{U}p$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 1.

Które formuły są równoważne formule $p \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{X}p)$?

- $\mathrm{G}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{XG}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{GX}p$ jest
- $p\mathrm{U}p$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 1.

Które formuły są równoważne formule $p \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{X}p)$?

- $\mathrm{G}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{XG}p$ jest
- $p \wedge \mathrm{GX}p$ jest
- $p\mathrm{U}p$ nie jest

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 2.

Które formuły są równoważne formule $q \vee (p \wedge X(p U q))$?

- $p \wedge X(p \vee q))$
- $Gp \wedge Fq$
- $p U q$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 2.

Które formuły są równoważne formule $q \vee (p \wedge X(p U q))$?

- $p \wedge X(p \vee q))$ nie jest
- $Gp \wedge Fq$
- $p U q$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 2.

Które formuły są równoważne formule $q \vee (p \wedge X(p U q))$?

- $p \wedge X(p \vee q))$ nie jest
- $Gp \wedge Fq$ nie jest
- $p U q$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 2.

Które formuły są równoważne formule $q \vee (p \wedge X(p U q))$?

- $p \wedge X(p \vee q))$ nie jest
- $Gp \wedge Fq$ nie jest
- $p U q$ jest

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 3.

Zapisz następującą własność jako formułę LTL:

- *p* jest prawdziwe dokładnie w jednym momencie, czyli $(\exists! i)\ (s_i \models p)$

  ∃! oznacza „istnieje dokładnie jeden”.

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 3.

Zapisz następującą własność jako formułę LTL:

- *p* jest prawdziwe dokładnie w jednym momencie, czyli $(\exists! i)\ (s_i \models p)$

  ∃! oznacza „istnieje dokładnie jeden”.

$$\mathrm{F}p \wedge \mathrm{G}(p \Rightarrow \mathrm{XG}\neg p)$$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 4.

Zapisz następującą własność jako formułę LTL:

- *p* jest prawdziwe przynajmniej w trzech momentach, czyli
  $(\exists\, i,j,k)\ (i \neq j \wedge i \neq k \wedge j \neq k \wedge (s_i \models p) \wedge (s_j \models p) \wedge (s_k \models p))$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 4.

Zapisz następującą własność jako formułę LTL:

- *p* jest prawdziwe przynajmniej w trzech momentach, czyli $(\exists\, i,j,k)\ (i \neq j \wedge i \neq k \wedge j \neq k \wedge (s_i \models p) \wedge (s_j \models p) \wedge (s_k \models p))$

$$F(p \wedge XF(p \wedge XFp))$$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 5.

Zapisz następującą własność jako formułę LTL:

- *p* jest prawdziwe nieskończenie wiele razy, ale nigdy w dwóch kolejnych momentach, czyli
  $(\exists i)\ (s_i \models p) \wedge$
  $(\forall j, \exists k>j)\ ((s_j \models p) \Rightarrow (s_k \models p)) \wedge$
  $(\neg\exists m)\ ((s_m \models p) \wedge (s_{m+1} \models p))$

Przykładowe formuły

Ćwiczenie 5.

Zapisz następującą własność jako formułę LTL:

- *p* jest prawdziwe nieskończenie wiele razy, ale nigdy w dwóch kolejnych momentach, czyli
  $(\exists i)\ (s_i \models p) \wedge$
  $(\forall j, \exists k>j)\ ((s_j \models p) \Rightarrow (s_k \models p)) \wedge$
  $(\neg\exists m)\ ((s_m \models p) \wedge (s_{m+1} \models p))$

$$G(Fp \wedge (p \Rightarrow X\neg p))$$

Koniec

Literatura:

- E.A. Emerson „Temporal and modal logic”, 1995
- R. Klimek *„Zastosowanie logiki temporalnej w specyfikacji i weryfikacji oprogramowania – w stronę czasu rzeczywistego”*, w: „Wykłady zaproszone. Systemy Czasu Rzeczywistego 2000”, 2001