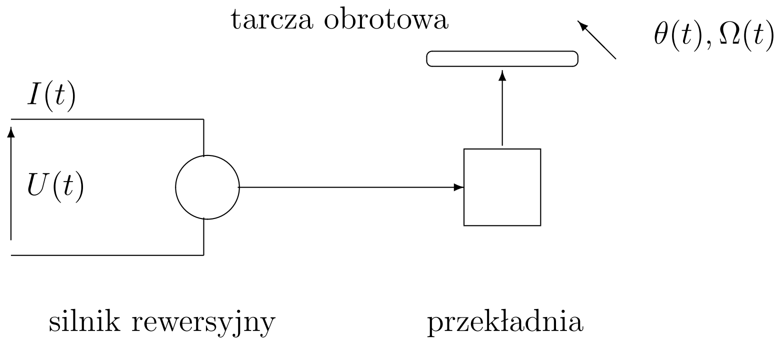
Modelowanie liniowych układów sterowania i ich stabilność

Wyznaczanie rozwiązań liniowych stacjonarnych równań stanu z czasem ciągłym

Przykład: Układ sterowania tarczą obrotową



Modelując układ w zapisie standardowym teorii sterowania określamy

- zmienne układu sterowania tarczą obrotową

  $x_1(t) \doteq \theta(t)$, $x_2(t) \doteq \Omega(t)$ - zmienne stanu obiektu,

  $u(t) \doteq I(t)$ - zmienna sterująca obiektu w układzie otwartym,

  $u(t) \doteq U(t)$ - zmienna sterująca obiektu w układzie zamkniętym,

  $y_1(t) \doteq U_1(t)$, $y_2(t) \doteq U_2(t)$ - zmienne wyjściowe obiektu,

- równania stanu obiektu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(t_0) = x_{10}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = b\, u(t), \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

- równania wyjścia obiektu

$$y_1(t) = c_1 x_1(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$y_2(t) = c_2 x_2(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

oraz

- równanie sprzężenia zwrotnego

$$u(t) = -y_1(t) - y_2(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Przytoczony model układu sterowania tarczą obrotową jest modelem liniowym. W tym przypadku użyteczny jest wektorowo-macierzowy zapis modelu umożliwiający zastosowanie ogólnych metod badania liniowych układów sterowania. Charakterystycznymi grupami zmiennych są w tym przypadku dwuwymiarowy stan i dwuwymiarowe wyjście obiektu zapisywane w postaci wektorów kolumnowych

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \; y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

oraz skalarne sterowanie obiektu $u(t)$.

Równania układu sterowania zapisujemy w postaci wetorowo-macierzowej

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad u(t) = Ky(t),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jest macierzą stanu,

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

jest macierzą sterowania (zredukowaną do wektora kolumnowego dla rozpatrywanego przykładu),

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

jest macierzą wyjścia, zaś

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest macierzą sprzężenia zwrotnego (zredukowaną do wektora wierszowego dla rozpatrywanego przykładu).

Rozważając **zadanie sterowania docelowego w układzie otwartym** posługujemy się równaniem stanu układu otwartego z zadanym stanem początkowym i końcowym

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

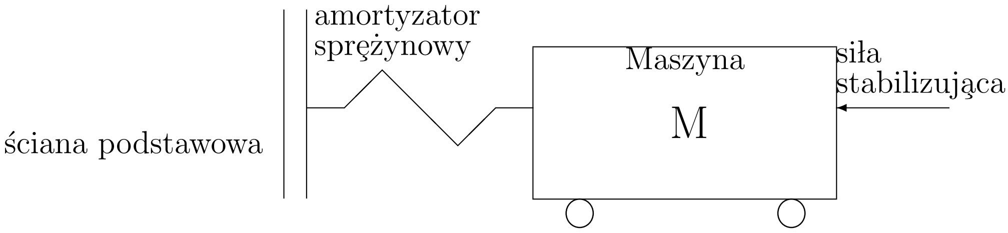
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Rozważając **zadanie regulacji stanu nominalnego $\bar{x} = 0$ w układzie zamkniętym** posługujemy się równaniem stanu układu zamkniętego z zadanym odchyleniem początkowym od stanu nominalnego

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $\tilde{A} = A + BKC$ jest macierzą stanu układu zamkniętego.

Przykład: Układ sterowania mechanicznym oscylatorem (amortyzator masy)



Położenie $\ell(t)$ maszyny M stabilizowane jest w punkcie $\bar{\ell} = 0$ (położenie neutralne) za pomocą siły stabilizującej $F(t)$ i amortyzatora sprężynowego o współczynniku sprężystości a. Podstawowe równanie ruchu maszyny M odzwierciedla redukcję jej przyspieszenia przez amortyzator proporcjonalnie do jej odchylenia od położenia neutralnego i proporcjonalnie do siły $F(t)$:

$$\ddot{\ell}(t) = -a\ell(t) - F(t), \quad \ell(t_0) = \ell_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \quad \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0.$$

Równanie ruchu swobodnego maszyny $(F(t) = 0)$

przybiera postać

$$\ddot{\ell}(t) = -a\ell(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \quad \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0.$$

Rozwiązanie równania ruchu swobodnego maszyny (jako liniowego stacjonarnego równania różniczkowego) może być uzyskane metodą podstawienia Eulera

$$\ell(t) = e^{st}.$$

Prowadzi to do równania $e^{st}(s^2 + a) = 0$. Ponieważ $e^{st} \neq 0$, więc musi być spełnione równanie charakterystyczne $s^2 = -a$, którego pierwiastki są urojone $s_{1,2} = \pm \jmath \sqrt{a}$. Oznaczając $\omega \doteq \sqrt{a}$ (częstotliwość własna oscylatora) możemy zapisać rozwiązanie równania ruchu swobodnego jak następuje

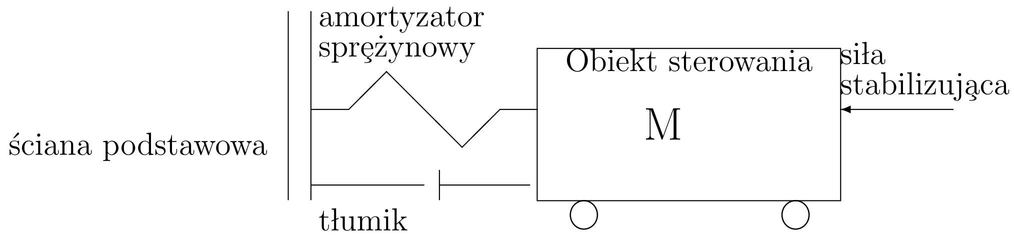
$$\ell(t) = C_1 cos\ \omega t + C_2 sin\ \omega t, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie stałe C_1 i C_2 są określone przez warunki początkowe. Tak więc ruch swobodny maszyny M ma charakter oscylacyjny. Obiekt sterowania można określić mianem oscylatora mechanicznego. Jeśli układ jest wyposażony oprócz amortyzatora sprężynowego także w tłumik, to równanie ruchu maszyny przybierze postać

$$\ddot{\ell}(t) = -a_1\ell(t) - a_2\dot{\ell}(t) - F(t),$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \quad \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie a_1 jest współczynnikiem sprężystości amortyzatora, zaś a_2 - współczynnikiem tłumienia tłumika.



Modelując układ w zapisie standardowym teorii sterowania określamy

• zmienne stanu mechanicznego oscylatora jako jego położenie i prędkość

$$x_1(t) \doteq \ell(t), \; x_2(t) \doteq \dot{\ell}(t),$$

zmienną sterującą oscylatora jako siłę stabilizującą

$$u(t) \doteq F(t),$$

zmienne wyjściowe jako napięcia przetworników położenia i prędkości oscylatora

$$y_1(t) \doteq U_1(t), \; y_2(t) \doteq U_2(t),$$

• równania stanu obiektu dla przypadku oscylatora liniowego ze sterowaniem w postaci siły stabilizującej

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) - a_2(t) x_2(t) + b\, u(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20},$$

- równania wyjścia obiektu

$$y_1(t) = c_1 x_1(t), \quad y_2(t) = c_2 x_2(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

- równanie sprzężenia zwrotnego

$$u(t) = -k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie k_1 i k_2 są współczynnikami przetwarzania sygnałów napięciowych na siłę stabilizującą.

Wprowadzamy oznaczenia wektorowo-macierzowe dla zmiennych procesowych obiektu

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \textit{stan}, \ u(t) - \textit{sterowanie},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \textit{wyjście},$$

oraz równań układu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad u(t) = Ky(t),$$

$$t \in [t_0, t_1],$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

jest macierzą stanu,

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

jest macierzą sterowania (zredukowaną do wektora kolumnowego dla rozpatrywanego przykładu),

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

jest macierzą wyjścia, zaś

$$K = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

jest macierzą sprzężenia zwrotnego (zredukowaną do wektora wierszowego dla rozpatrywanego przykładu).

Rozważając **zadanie sprowadzania oscylatora do położenia nominalnego w układzie otwartym** posługujemy się równaniem stanu układu otwartego z zadanym stanem początkowym i końcowym

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = 0.$$

Rozważając **zadanie regulacji stanu nominalnego $\bar{x} = 0$ w układzie zamkniętym** posługujemy się równaniem stanu układu zamkniętego z zadanym odchyleniem początkowym od stanu nominalnego

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = 0,$$

gdzie $\tilde{A} = A + BKC$ jest macierzą stanu układu zamkniętego.

W sformułowaniu optymalizacyjnym rozważamy zadania minimalnoczasowego lub minimalnoenergetycznego sprowadzania oscylatora do położenia nominalnego.

Rozwiązanie równania stanu obiektu sterowania opisywanego skalarnym równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad t \in [0, \bar{t}\,], \quad x(0) = x_0$$

przybiera postać

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau,$$

gdzie funkcja eksponencjalna e^{at} jest określona za pomocą szeregu potęgowego

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{6}a^3t^3 + ... + \frac{1}{k!}a^kt^k + ... \ (*)$$

Rozwiązanie wektorowo-macierzowego równania stanu określone jest przez macierzową funkcję wykładniczą (eksponentę macierzową) zdefiniowaną za pomocą szeregu macierzowego

$$e^{At} \doteq I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ... + \frac{1}{k!}A^kt^k + ...$$

Definicja ta jest naturalnym uogólnieniem skalarnej funkcji wykładniczej (eksponenty skalarnej) zdefiniowanej za pomocą skalarnego szeregu potęgowego (*).

Inaczej mówiąc eksponenta macierzowa jest sumą szeregu macierzowego

$$e^{At} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(At)^{\kappa}}{\kappa!}.$$

Prztoczymy podstawowe własności eksponenty macierzowej:

- przemienność macierzy e^{At} i macierzy A

$$e^{At}A = (I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...)A$$

$$= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \frac{A^4t^3}{3!} + ...$$

$$= A(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...) = Ae^{At}\ .$$

- przemienność macierzy e^{At} i A^{-1}

$$(Ae^{At} = e^{At}A) \Rightarrow (e^{At} = A^{-1}e^{At}A)$$

$$\Rightarrow (e^{At}A^{-1} = A^{-1}e^{At}).$$

- różniczkowanie eksponenty macierzowej określone jest przez różniczkowanie szeregu macierzowego wyraz po wyrazie

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + ...) =$$

$$A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + ... = A(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ...)$$

$$= Ae^{At} = e^{At}A\ .$$

- całkowanie eksponenty macierzowej określone jest przez całkowanie szeregu macierzowego wyraz po wyrazie

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = \int_0^t (I + A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} + \frac{A^3\tau^3}{3!} + ...)d\tau =$$

$$It + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!} + \frac{A^3t^4}{4!} + ... = A^{-1}A(It + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!} + ...)$$
$$= A^{-1}(At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + ...)$$
$$= A^{-1}(e^{At} - I) = (e^{At} - I)A^{-1}$$

.

Wzór ten obowiązuje jeśli macierz A jest nieosobliwa tj. $det(A) \neq 0$. Całkę osobliwej macierzy oblicza się całkując wszystkie elementy macierzy

$$\int_0^t \big(a_{ij}(\tau)\big)_{i,j=1,\ldots,n} d\tau = \Big(\int_0^t a_{ij}(\tau)d\tau\Big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Jeśli chwila początkowa przedziału sterowania jest niezerowa $t_0 \neq 0$, to dla analizy procesu sterowania użyteczna jest eksponenta macierzowa z przesuniętym argumentem czasowym $t - t_0$

$$e^{A(t-t_0)} \doteq I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!}$$
$$+ ... + \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k + ...$$

Podstawienie $t - t_0$ w miejsce t we wzorze na różniczkowanie eksponenty macierzowej daje w wyniku wzór

$$\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} = Ae^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)}A,$$

a wielokrotne różniczkowanie szeregu macierzowego pozwala uzyskać wzory dla $t_0 = 0$

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{At} = A^k e^{At} = e^{At}A^k,$$

i dla $t_0 \neq 0$

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{A(t-t_0)} = A^k e^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)}A^k.$$

Rozwiązywanie jednorodnego liniowego stacjonarnego równania stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; t \in [t_0, +\infty).$$

Rozwiązanie przewidywane jest w postaci

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Weryfikacja przewidywanego rozwiązania

$$\big(\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x(t_0) = Ae^{A(t-t_0)}x_0\big) \Rightarrow (\dot{x}(t) = Ax(t)).$$

Weryfikacja warunku początkowego

$$x(t_0) = e^{A(t-t_0}x_0 = e^{A0}x_0 = Ix_0 = x_0.$$

Rozwiązywanie niejednorodnego liniowego stacjonarnego równania stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Rozwiązanie przewidywane jest w postaci

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A((t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Weryfikacja przewidywanego rozwiązania

$$\frac{d}{dt}\big(e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\big)$$

$$= \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \frac{d}{dt}\big(e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\big)$$

$$= Ae^{A(t-t_0)}x_0 + Ae^{At}\int_0^t e^{A(-\tau)}Bu(\tau)d\tau + e^{At}e^{-At}Bu(t)$$

$$= A\big(e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{A(-\tau)}Bu(\tau)d\tau\big) + Bu(t)$$

$$\Rightarrow (\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)).$$

- Wyznaczanie eksponenty macierzowej za pomocą metod rachunku operatorowego - porównanie rozwiązań w dziedzinie czasowej i operatorowej.

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a

$$X(s) \doteq \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

do jednorodnego równania stanu

$$\big(\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0\big) \Rightarrow \big(sX(s) - x_0 = AX(s)\big)$$

prowadzi do zależności

$$(sI - A)X(s) = x_0 \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x_0.$$

Porównując rozwiązania jednorodnego równania stanu w dziedzinie czasowej i operatorowej

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad X(s) = (sI - A)^{-1}x_0,$$

wnioskujemy, że zachodzi równość

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.$$

Przykładowo dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

uzyskuje się

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix},$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2+1} & \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ \frac{-2}{(s+1)^2+1} & \frac{s}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}(cos\ t + sin\ t) & e^{-t}sin\ t \\ -2e^{-t}sin\ t & e^{-t}(cos\ t - sin\ t) \end{pmatrix},$$

gdzie wzięto pod uwagę zależności

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} sin\omega t\} = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2},$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} cos\omega t\} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}.$$

Korzystając z eksponenty macierzowej można łatwo wyznaczyć odpowiedzi liniowego stacjonarnego układu sterowania na podstawowe przebiegi sterowania ($t_0 = 0$):

• **odpowiedź impulsowa** tj. odpowiedź na sterowanie $u(t) = \bar{u}\delta(t)$, gdzie $\bar{u} \in R^m$ jest wektorem stałym (bierzemy pod uwagę własność filtrującą δ-funkcji)

$$x^{im}(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B\bar{u}\delta(\tau)d\tau)$$
$$= e^{At}(x_0 + e^{-A0}B\bar{u}) = e^{At}(x_0 + B\bar{u}).$$

• **odpowiedź skokowa** tj. odpowiedź na sterowania $u(t) = \bar{u}1(t)$ (stosujemy wzór na całkowanie eksponenty macierzowej)

$$x^{sk}(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B\bar{u}d\tau)$$

$$= e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} d\tau B\bar{u})$$

$$= e^{At}(x_0 + (-A)^{-1}(e^{-At} - I)B\bar{u}) = e^{At}x_0 + A^{-1}(e^{At} - I)B\bar{u}.$$

• **odpowiedź liniowa** tj. odpowiedź na sterowanie $u(t) = \bar{u}t$ (stosujemy wzór na całkowanie przez części i wzór na całkowanie eksponenty macierzowej)

$$x^{li}(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B\bar{u}\tau d\tau)$$

$$= e^{At}(x_0 + (-A)^{-1} \int_0^t \frac{d}{d\tau} e^{-A\tau} B\bar{u}\tau d\tau)$$

$$= e^{At}(x_0 - A^{-1}(e^{-At}B\bar{u}t - \int_0^t e^{-A\tau} B\bar{u})$$

$$= e^{At}(x_0 - A^{-1}(e^{-At}B\bar{u}t - (-A)^{-1}(e^{-At} - I)B\bar{u})$$

$$= e^{At}x_0 + (A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t)B\bar{u}.$$

Jeśli dla rozważanego przykladu założyć

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = 1, \quad \bar{u} = 1,$$

to uzyskuje się

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}(cos\ t + sin\ t) & e^{-t}sin\ t \\ -2e^{-t}sin\ t & e^{-t}(cos\ t - sin\ t) \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix},$$

$$x^{im}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 2e^{-t}(cos\ t - sin\ t) \end{pmatrix},$$

$$x^{sk}(t) = \begin{pmatrix} -0.5(cos\ t + sin\ t) + 0.5 \\ e^{-t}sint \end{pmatrix},$$

$$x^{li}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(cos\ t + sin\ t) - 0.5t \\ 0.5e^{-t}(cos\ t - 1.5sin\ t) - 0.5 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z zapisu wektorowo-macierzowego można określić **algorytm sterowania docelowego dla układów liniowych stacjonarnych:**

Twierdzenie: Sterowanie

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_0 - t_1)} R^{-1} x_0 \quad (\star)$$

przeprowadza układ liniowy stacjonarny

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

ze stanu początkowego $x(t_0) = x_0$ do stanu końcowego $x(t_1) = x_1$ w czasie $t_1 - t_0$, jeżeli macierz R określona jak następuje

$$R \doteq \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0 - t)} B B^T e^{A^T(t_0 - t)} dt$$

jest nieosobliwa.

Dowód: Powinna być spełniona zależność

$$x(t_1) = 0 = e^{A(t_1 - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - t)} Bu(t) dt \quad | \cdot e^{-A(t_1 - t_0)}$$

Stąd

$$0 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0 - t)} Bu(t) dt$$

czyli

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} Bu(t)dt.$$

Podstawiając sterowanie $(\star)$ do ostatniej zależności uzyskuje się

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} BB^T e^{A^T(t_0-t)} R^{-1} x_0 dt,$$

co oznacza, że $x_0 = RR^{-1}x_0$. $\square$

Niech dla przykładu sterowania tarczą obrotową $t_0 = 0,\ t_1 = 1$ oraz

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uzyskujemy więc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt$$

Stąd

$$R = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, R^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$u(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tak więc sterowanie docelowe ma postać $u(t) = 18t - 10$, a trajektoria stanu procesu docelowego jest określona jak następuje

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big(18\tau - 10\Big)\, d\tau.$$

czyli

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 + t - 5t^2 + 3t^3 \\ 1 - 10t + 9t^2 \end{pmatrix}_{t=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczanie rozwiązań liniowych niestacjonarnych równań stanu z czasem ciągłym

Wektorowo-macierzowe równanie stanu liniowego niestacjonarnego układu sterowania ma postać

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dla równania jednorodnego

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad x(t_0) = x_0$$

definiujemy macierz fundamentalną (macierz podstawową) układu $\Phi(t, t_0)$ jako macierz stanowiącą rozwiązanie macierzowego równania różniczkowego

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \in [t_0, \infty), \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Rozwiązanie jednorodnego równania stanu przewidujemy w postaci

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0).$$

Weryfikacja rozwiązania jednorodnego równania stanu

$$\Big(\frac{d}{dt}(\Phi(t, t_0)x(t_0)) = A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)\Big)$$
$$\Rightarrow \big(\dot{\Phi}(t, t_0)x(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)\big)$$
$$\Rightarrow \big(\dot{x}(t) = A(t)x(t)\big)$$

Weryfikacja warunku początkowego

$$\Phi(t_0, t_0)x(t_0) = Ix(t_0) = x(t_0).$$

Rozwiązanie niejednorodnego równania stanu przewidujemy w postaci

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Weryfikacja rozwiązania niejednorodnego równania stanu

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi(t, t_0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\big)$$

$$= \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0)x_0 + \int_0^t \frac{d}{dt}\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$+\frac{d}{dt}\int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= A(t)\big(\Phi(t, t_0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\big)$$

$$+B(t)u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

- Zastosowanie macierzy fundamentalnej do wyznaczania rozwiązań okresowych równań stanu.

Rozwiązywanie nieliniowych równań metodą Newtona

Dane jest nieliniowe równanie skalarne $f(x) = 0$. Dokonujemy linearyzacji równania w punkcie początkowym x_0

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\Rightarrow x - x_0 = -(f'(x_0))^{-1} f(x_0).$$

Obliczamy nowe przybliżenie rozwiązania

$$x_1 = x_0 - (f'(x_0))^{-1} f(x_0).$$

Dokonujemy linearyzacji równania w punkcie kolejnym x_1

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$
$$\Rightarrow x - x_1 = -(f'(x_1))^{-1} f(x_1).$$

Obliczamy nowe przybliżenie rozwiązania

$$x_2 = x_1 - (f'(x_1))^{-1} f(x_1)...$$

Wynika stąd iteracyjna metoda Newtona

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa - (f'(x_\kappa))^{-1} f(x_\kappa), \quad \kappa = 0, 1, 2, ... \,.$$

Dla równań z argumentem wektorowym $x \in R^n$ pochodna $f'(x_\kappa)$ oznacza macierz Jacobiego, tj.

$$f'(x_\kappa) = (\frac{\partial f_{(i)}}{\partial x_{(j)}}(x_\kappa))_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Aby wyznaczyć τ-okresowe rozwiązanie nieliniowego równania stanu wyróżniamy w charakterze argumentu równania stanu jego stan początkowy i poszukujemy takiego stanu początkowego, który zapewni τ-okresowy przebieg zmiennych stanu. Równanie zapisujemy w postaci $x(0) - x(\tau, x(0), u) = 0$. Rolę pochodnej $f'(x_\kappa)$ pełni w tym przypadku macierz

$$f'(x_\kappa) = I - \Phi(\tau, 0) = I - \Big(\frac{\partial x_i(\tau)}{\partial x_j(0)}\Big)_{i,j=1,\ldots n},$$

zaś metoda Newtona przyjmuje postać

$$x(0)_{\kappa+1} = x(0)_\kappa - \Big((I - \Phi(\tau, 0)(x(0)_\kappa)\Big)^{-1}\Big(x(0)_\kappa \\ -x(\tau, x(0)_\kappa, u)\Big).$$

Wyznaczanie rozwiązań liniowych stacjonarnych równań stanu z czasem dyskretnym.

- Dyskretyzacja ciągłych układów sterowania:

Niech T oznacza przedział dyskretyzacji czasu i niech sterowanie będzie stałe w przedziale $[kT,(k+1)T)$. Ze wzoru na rozwiązanie liniowego stacjonarnego układu sterowania wynika, że

$$x((k+1)T) = e^{A((k+1)T-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-t)}Bu(kT)dt.$$

Zamiana zmiennych całkowania

$$T - t = \tilde{t}, \quad t = kT \Rightarrow \tilde{t} = T,$$

$$t = (k+1)T \Rightarrow \tilde{t} = 0, \quad dt = -d\tilde{t}$$

pozwala zapisać zależność

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) - \int_{T}^{0} e^{A\tilde{t}}Bu(kT)d\tilde{t}$$

czyli

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{0}^{T} e^{A\tilde{t}}d\tilde{t}Bu(kT)$$
$$= e^{AT}x(kT) + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu(kT).$$

Podstawiając k w miejsce $k\boldsymbol{T}$ uzyskuje się następujący opis układu dyskretnego

$$x(k+1) = \boldsymbol{A}x(k) + \boldsymbol{B}u(k),$$

gdzie

$$\boldsymbol{A} = e^{A\boldsymbol{T}}, \quad \boldsymbol{B} = A^{-1}(e^{A\boldsymbol{T}} - I)B.$$

Dla przykładu z macierzami stanu i sterowania

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

uzyskuje się

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}(cos\ t + sin\ t) & e^{-t}sin\ t \\ -2e^{-t}sin\ t & e^{-t}(cos\ t - sin\ t) \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

oraz

$$\boldsymbol{A} = e^{A\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} e^{-\boldsymbol{T}}(cos\ \boldsymbol{T} + sin\ \boldsymbol{T}) & e^{-\boldsymbol{T}}sin\ \boldsymbol{T} \\ -2e^{-\boldsymbol{T}}sin\ \boldsymbol{T} & e^{-\boldsymbol{T}}(cos\ \boldsymbol{T} - sin\ \boldsymbol{T}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = A^{-1}(e^{A\boldsymbol{T}} - I)B = \begin{pmatrix} 0.5(1 - e^{-\boldsymbol{T}}(cos\ \boldsymbol{T} + sin\ \boldsymbol{T}) \\ e^{-\boldsymbol{T}}sin\ \boldsymbol{T} \end{pmatrix}.$$

Metoda wzorów rekurencyjnych rozwiązywania liniowych stacjonarnych równań stanu z czasem dyskretnym

Do stacjonarnego dyskretnego równania stanu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = k_0, k_0+1, k_0+2, ...$$

$$x(k_0) = x_0$$

można zastosować metodę wzorów rekurencyjnych

$$x(k_0+1) = Ax(k_0) + Bu(k_0),$$

$$x(k_0+2) = Ax(k_0+1) + Bu(k_0+1)$$

$$= A^2x(k_0) + ABu(k_0) + Bu(k_0+1),$$

$$x(k_0+3) = Ax(k_0+2) + Bu(k_0+2)$$

$$= A^3x(k_0) + A^2Bu(k_0) + ABu(k_1) + Bu(k_2),$$

a więc

$$x(k) = A^{k-k_0}x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j), \quad k > k_0.$$

Jeśli $k_0 = 0$, to rozwiązanie przybiera postać

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j), \quad k > 0.$$

Rolę macierzy fundamentalnej stacjonarnego dyskretnego równania stanu pełni macierz A^k, którą można wyznaczyć stosując transformację

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

do jednorodnego dyskretnego równania stanu

$$(x(k+1) = Ax(k),\ k_0 = 0,\ x(0) = x_0)$$

$$\Rightarrow (zX(z) - zx_0 = AX(z)).$$

Stąd

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z x_0.$$

Porównanie rozwiązań w dziedzinie czasowej i operatorowej daje w wyniku

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1} z\}.$$

Niech dyskretne równanie stanu będzie postaci

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k),$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k_0 = 0.$$

W tym przypadku

$$zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 4 & z+5 \end{pmatrix}$$

oraz

$$(zI - A)^{-1}z = \frac{z}{z^2 + 5z + 4}\begin{pmatrix} z+5 & 1 \\ -4 & z \end{pmatrix},$$

a więc

$$A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k 4/3 - (-4)^k/3 & (-1)^k/3 - (-4)^k/3 \\ -(-1)^k 4/3 + (-4)^k 4/3 & -(-1)^k/3 + (-4)^k 4/3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie jednorodnego dyskretnego równania stanu ma zatem postać

$$x(k) = \begin{pmatrix} (-1)^k 4/3 - (-4)^k/3 \\ -(-1)^k 4/3 + (-4)^k 4/3 \end{pmatrix},$$

a rozwiązanie niejednorodnego równania dla $u(k) = 1$ ma postać

$$x(k) = \begin{pmatrix} (-1)^k 4/3 - (-4)^k/3 \\ -(-1)^k 4/3 + (-4)^k 4/3 \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} (-1)^{k-j-1}/3 - (-4)^{k-j-1}/3 \\ -(-1)^{k-j-1}/3 + (-4)^{k-j-1} 4/3 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczanie rozwiązań liniowych niestacjonarnych równań stanu z czasem dyskretnym.

Stosując do niestacjonarnego dyskretnego równania stanu

$$x(k+1) = A(k)x(k)+B(k)u(k), \quad k = k_0, k_0+1, k_0+2, ...$$

$$x(k_0) = x_0$$

metodę wzorów rekurencyjnych

$$x(k_0 + 1) = A(k_0)x(k_0) + B(k_0)u(k_0),$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1)+B(k_0+1)u(k_0+1) =$$

$$A(k_0 + 1)A(k_0)x(k_0) + A(k_0 + 1)B(k_0)u(k_0)$$

$$+B(k_0 + 1)u(k_0 + 1)$$

uzyskujemy wzór ogólny

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, 1+j)B(j)u(j), \quad k > k_0,$$

gdzie $\Phi(k, k_0) = A(k-1)A(k-2)...A(k_0), \quad k > k_0$. Tak więc rolę macierzy fundamentalnej pełni w tym przypadku iloczyn macierzy $A(k)$ dla $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ..., k-1$.

Stabilność liniowych układów sterowania z czasem ciągłym

W teorii stabilności układów sterowania badamy wrażliwość trajektorii stanu na zaburzenia stanu początkowego. Interesuje nas czy odchylenie rozwiązania równania zaburzonego od rozwiązania równania pierwotnego będzie zanikać z upływem czasu (w tym przypadku układ sterowania określamy jako stabilny asymptotycznie), czy też odchylenie to będzie pozostawać w pewnym otoczeniu rozwiązania równania pierwotnego (w tym przypadku układ sterowania określamy jako stabilny lecz nieasymptotycznie), lub też czy odchylenie to będzie nieograniczenie narastać z upływem czasu (w tym przypadku układ sterowania określamy jako niestabilny). Badanie stabilności może dotyczyć wyróżnionej trajektorii stanu o pożądanym przebiegu np. trajektorii stałej określającej tzw. punkt równowagi układu. Dla układów liniowych obowiązuje następująca

Definicja: Punkt przestrzeni stanu x_r, dla którego $Ax_r = 0$ dla wszystkich chwil $t \geq 0$, nazywamy punktem równowagi liniowego autonomicznego układu sterowania opisywanego równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \geq 0,\ x(0) = x_0.$$

Jeżeli $detA \neq 0$, to liniowy układ sterowania ma dokładnie jeden punkt równowagi w początku układu współrzędnych tj. zerowy punkt równowagi.

Niech $\boldsymbol{x}(t)$ będzie dowolną (niezerową) wyróżnioną trajektorią stanu liniowego układu sterowania związaną z wyróżnionym stanem początkowym $\boldsymbol{x}_0$ i z wyróżnionym sterowaniem $\boldsymbol{u}(t)$. Ten wyróżniony rodzaj ruchu układu sterowania spełnia równanie stanu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \;\; \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \;\; t \in [t_0, +\infty).$$

Analizę warunków stabilności układów sterowania można sprowadzić do badania stabilności **zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania** określonego za pomocą przekształcenia

$$(\tilde{x}(t) = x(t) - \boldsymbol{x}(t)) \Rightarrow (x(t) = \tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t)).$$

Równanie stanu względem nowych współrzędnych stanu przybierze postać

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(\tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t)) + B\boldsymbol{u}(t),$$

czyli

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t).$$

Rozwiązanie zerowe $\tilde{x}(t) = 0$ ostatniego równania jest równoważne z wyróżnionym rozwiązaniem $\boldsymbol{x}(t)$ równania pierwotnego. Rozwiązanie to jest punktem równowagi układu przekształconego, gdyż

$$A\tilde{x}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = 0.$$

Tak więc badanie stabilności dowolnej wyróżnionej trajektorii stanu liniowego stacjonarnego układu sterowania można sprowadzić do badania zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania z tą samą macierzą stanu A.

Definicja: Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem stabilnym, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ϵ można dobrać taką liczbę dodatnią $\eta = \eta(\epsilon)$, że trajektoria rozpoczynająca się w punkcie x_0, leżącym wewnątrz kuli o promieniu η, pozostanie wewnątrz kuli o promieniu ϵ dla dowolnej chwili $t > 0$.

Definicja: Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem asymptotycznie stabilnym, jeżeli punkt ten jest stabilny i ponadto $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Analizując stabilność liniowego stacjonarnego układu sterowania bierzemy pod uwagę składową swobodną rozwiązania pochodzącą od zaburzenia stanu początkowego

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_r + \delta x_0, \quad t \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}\delta x_0, \quad t \in [0, \infty).$$

Badanie stabilności asymptotycznej liniowych stacjonarnych układów sterowania sprowadza się do warunku zanikania składowej rozwiązania pochodzącej od zaburzenia stanu początkowego tj. do warunku

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\delta x_0 = 0$$

Rozważana składowa przybiera postać

$$e^{At}\delta x_0 = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}\delta x_0$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\{(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(s)\delta x_{j0}/\Delta(s))_{i=1,\ldots,n}\} =$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{(X_1(s,\delta x_0),...X_i(s,\delta x_0),...,X_n(s,\delta x_0))^T\} \quad (\star)$$

gdzie $\Delta_{ij}(s)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia $<= n$ jako element macierzy dołączonej $(sI - A)^D$, a $\Delta(s) = det(sI - A)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia n. Do badania wyrażenia $(\star)$ można zastosować metodę rozkładu na ułamki proste. W tym celu wyznaczamy **wartości własne** $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A tj. pierwiastki równania $det(sI - A) = 0$.

W zależności od charakteru tych wartości własnych uzyskujemy składowe rozwiązania o różnej postaci.

- 1. Wartości własne $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy A są jednokrotne rzeczywiste - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s-s_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s-s_2} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s-s_n},$$

gdzie $c_{ij}(\delta x_0)$ są stałymi zależnymi od zaburzenia warunku początkowego. W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)e^{s_1 t} + c_{i2}(\delta x_0)e^{s_2 t} + ... + c_{in}(\delta x_0)e^{s_n t}.$$

- 2. Wśród wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A jest r-krotna wartość własna rzeczywista - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s-s_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{(s-s_2)^2} + ... + \frac{c_{ir}(\delta x_0)}{(s-s_r)^r}$$

$$+ ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s-s_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)e^{s_1 t} + c_{i2}(\delta x_0)te^{s_2 t} + ... + c_{ir}(\delta x_0)t^{r-1}e^{s_r t}$$

$$+ ... + c_{in}(\delta x_0)e^{s_n t}.$$

- 3. Wśród wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A jest para wartości zespolonych sprzężonych $s_{1,2} = \sigma \pm \jmath\omega$ - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s-(\sigma+\jmath\omega)} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s-(\sigma-\jmath\omega)} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s-s_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = \tilde{c}_{i1}(\delta x_0)e^{\sigma t} cos\ \omega t + \tilde{c}_{i2}(\delta x_0)e^{\sigma t} sin\ \omega t$$

$$+ ... + c_{in}(\delta x_0) e^{s_n t}.$$

• 4. Wśród wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A jest para r-krotnych wartości zespolonych sprzężonych $s_{1,2} = \sigma \pm \jmath\omega$ - w tym przypadku

$$X_i(s, \delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s - (\sigma + \jmath\omega)} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s - (\sigma - \jmath\omega)} + ...$$

$$+ \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{(s - (\sigma + \jmath\omega))^r} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{(s - (\sigma - \jmath\omega))^r} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s - s_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t, \delta x_0) = \tilde{c}_{i1}(\delta x_0) e^{\sigma t} cos\ \omega t + \tilde{c}_{i2}(\delta x_0) e^{\sigma t} sin\ \omega t + ...$$

$$+ \tilde{c}_{i,2r-1}(\delta x_0) t^{r-1} e^{\sigma t} cos\ \omega t + \tilde{c}_{i2r}(\delta x_0) t^{r-1} e^{\sigma t} sin\ \omega t$$

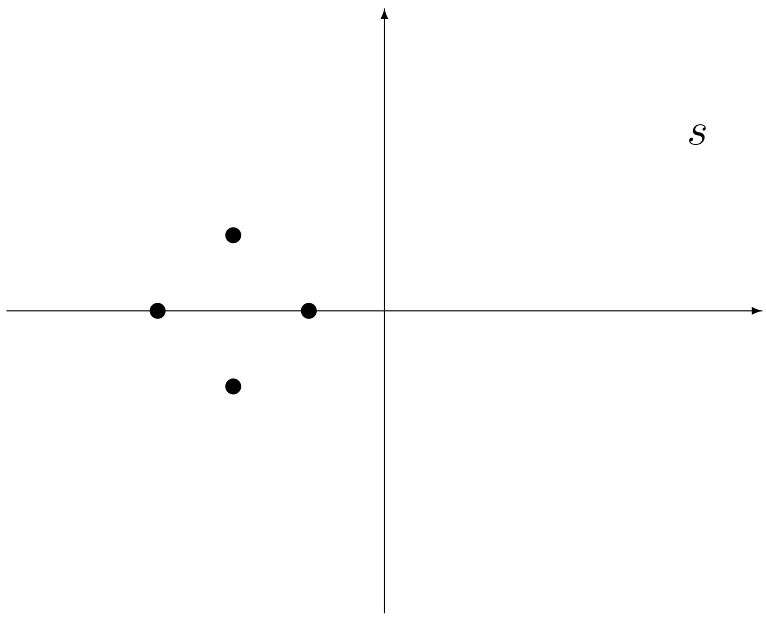
$$+ ... + c_{in}(\delta x_0) e^{s_n t}.$$

Biorąc pod uwagę zależność

$$\lim_{t \to \infty} t^p e^{\sigma t} = 0, \quad p = 1, 2, ...; \ \sigma < 0,$$

wnioskujemy, że we wszystkich czterech przypadkach składowe swobodne rozwiązania równania stanu pochodzące od zaburzenia warunku początkowego zanikają wraz z upływem czasu $t \to \infty$.

Oznacza to, że warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności liniowych stacjonarnych układów sterowania jest położenie wszystkich wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej tj. spełnienie warunku $Re(s_i) < 0$, $i = 1, ..., n$.



• **Definicja stabilności eksponencjalnej:** Punkt równowagi $x = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem stabilnym eksponencjalnie, jeżeli istnieją dwie liczby $\eta > 0$ i $\lambda < 0$ takie, że

$$||x(t)|| \leq \eta ||x(0)|| e^{\lambda t}.$$

Dla stabilnego liniowego układu sterowania o pojedynczych wartościach własnych $s_i, \ i = 1, ..., n$ uzyskuje się

$$\lambda = \max_{i=1,...,n} Re(s_i)$$

tj. szybkość stabilności określona jest w tym przypadku przez maksymalną część rzeczywistą wartości własnych macierzy stanu. Jeśli natomiast układ posiada wielokrotne wartości własne, to zachodzi oszacowanie

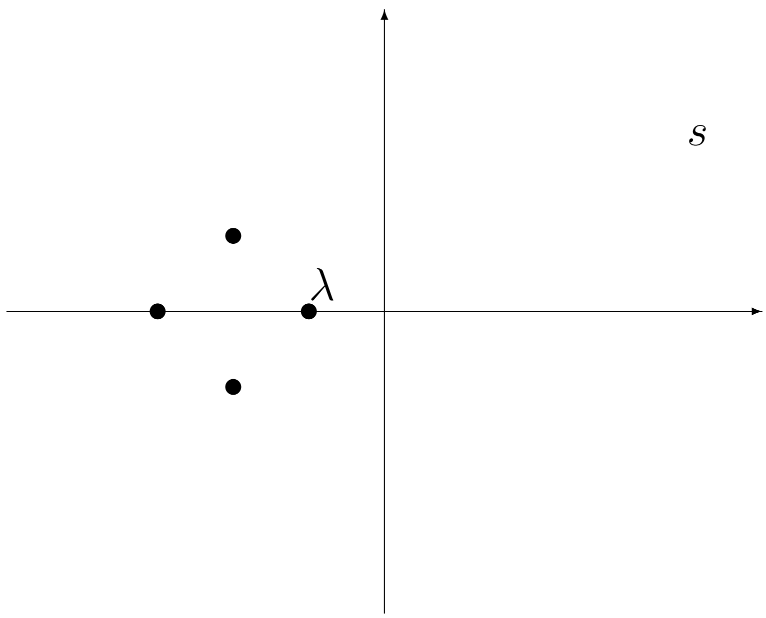
$$\lambda = \max_{i=1,...,n} Re(s_i) + \epsilon,$$

gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią - tak więc również w tym przypadu wykładnik szybkości stabilności jest w przybliżeniu równy maksymalnej części rzeczywistej wartości własnych macierzy stanu.

W przypadku zamkniętego układu sterowania

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t), \ \ \tilde{A} = A + BKC$$

badanie stabilności asymptotycznej sprowadza się do weryfikacji położenia wartości własnych macierzy stanu $\tilde{A}$ zamkniętego układu sterowania.



Ponieważ wartości własne macierzy A są pierwiastkami równania algebraicznego stopnia n, więc zbadać ich położenie na płaszczyźnie s można stosując kryterium Hurwitza. W tym celu

• (a) porządkujemy równanie wartości własnych do postaci

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0,$$

• (b) sprawdzamy, czy wszystkie współczynniki a_i są różne od zera i mają ten sam znak,

• (c) sprawdzamy, czy wszystkie minory główne Δ_i

macierzy Hurwitza $\mathcal{H}$ są dodatnie, gdzie

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Inna postać macierzy Hurwitza

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0... & \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0... & \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & 0 & 0... & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}_{n\times n}$$

• Przykład:

Macierz stanu zredukowanego układu sterowania z czasem ciągłym ma postać

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{pmatrix},$$

przy czym α i β są parametrami układu. Aby zbadać dla jakich parametrów układ sterowania jest asymptotycznie stabilny zapisujemy równanie wartości własnych macierzy stanu

$$det(sI - A) = det\begin{pmatrix} s+1 & -\alpha & 0 \\ \beta & s+1 & -\alpha \\ 0 & -\beta & s+1 \end{pmatrix} = 0.$$

Określamy następnie wielomian charakterystyczny układu w postaci standardowej

$$\Delta(s) = s^3+3s^2+(3-2\alpha\beta)s+1-2\alpha\beta = 0 \Rightarrow 1-2\alpha\beta > 0,$$

co oznacza, że $a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = 3 - 2\alpha\beta$ i $a_0 = 1 - 2\alpha\beta$.

Zapisujemy macierz Hurwitza

$$A = \begin{pmatrix} 2-2\alpha\beta & 1-2\alpha\beta & 0 \\ 1 & 3 & 3-2\alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kryterium stabilności Hurwitza implikuje warunki

• $a_1 = 3 - 2\alpha\beta > 0$ i $a_0 = 1 - 2\alpha\beta > 0$ (dodatniość współczynników wielomianu charakterystycznego układu),

• $\Delta_1 = 3 - 2\alpha\beta > 0$, i $\Delta_2 = 8 - 4\alpha\beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta < 0.5$ (dodatniość minorów głównych macierzy Hurwitza).

Tak więc obszar stabilności parametrycznej układu sterowania jest określony przez nierówność

$$\alpha\beta < 0.5.$$

Niech liniowy stacjonarny układ sterowania będzie opisywany singularnym równaniem stanu

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0,$$

przy czym $E \in R^{n \times n}$ i $A \in R^{n \times n}$ są macierzami kwadratowymi o tych samych wymiarach. Równania takie można rozwiązywać metodami rachunku operatorowego. Stosując przekształcenie Laplace'a do obydwu stron ostatniego równania uzyskujemy

$$E(sX(s) - x(0)) = AX(s) = AX(s) + BU(s), \quad s \in \mathcal{C},$$

gdzie $X(s)$ i $U(s)$ są transformatami trajektorii stanu i sterowania, a $\mathcal{C}$ jest płaszczyzną zespoloną. Niech $rank(sE - A) = n$ dla $s \in \mathcal{C}$. Z ostatniego równania wynika, że

$$X(s) = (sE - A)^{-1}Ex(0) + (sE - A)^{-1}BU(s)$$

czyli

$$X(s) = \bar{X}(s) + \tilde{X}(s).$$

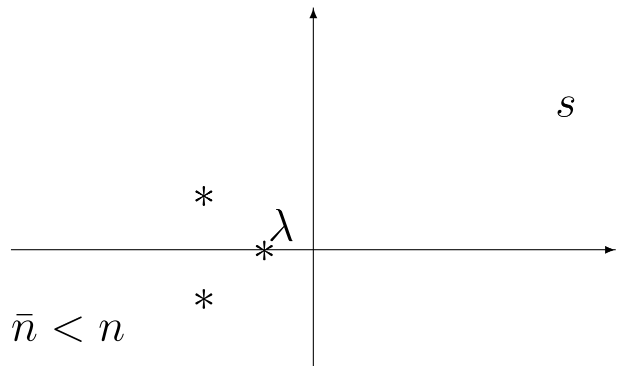
Rozwiązanie ma w dziedzinie operatorowej ma składową pochodzącą od warunku początkowego $\bar{X}(s)$ i składową pochodzącą od sterowania $\tilde{X}(s)$. Pierwsza składowa w dziedzinie czasowej wyrazi się jako

$$\bar{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sE - A)^{-1}\}E\delta x_0$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(s)\delta x_{j0}/\Delta(s))_{i=1,\dots,n}\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{(X_1(s,\delta x_0),...X_i(s,\delta x_0),...,X_n(s,\delta x_0))^T\} \quad (\star)$$

gdzie $\Delta_{ij}(s)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia $<= n$ jako element macierzy dołączonej pomnożonej przez macierz E $(sI - A)^D E$, a $\Delta(s) = det(sE - A)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia n. Do badania wyrażenia $(\star)$ można zastosować metodę rozkładu na ułamki proste. W tym celu wyznaczamy pierwiastki $s_1, s_2, ..., s_{\bar{n}}$ równania charakterystycznego $det(sE - A) = 0$ singularnego układu sterowania.Metoda rozkładu na ułamki proste implikuje w tym przypadku warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej: wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego singularnego układu sterowania $det(sE - A) = 0$ powinny leżeć w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s.



Liczba tych pierwiastków jest na ogół mniejsza od liczby wartości własnych macierzy A ze względu na osobliwość macierzy E i możliwe skrócenia.

Stabilność liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym

Badanie stabilności asymptotycznej liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym sprowadza się do warunku zanikania składowej rozwiązania pochodzącej od zaburzenia stanu początkowego tj. do warunku

$$\lim_{k\to\infty} A^k \delta x_0 = 0$$

Rozważana składowa przybiera postać

$$A^k \delta x_0 = \mathcal{Z}^{-1}\{(zI-A)^{-1}z\}\delta x_0$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\{(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(z) z \delta x_{j0}/\Delta(z))_{i=1,\dots,n}\} =$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{(X_1(z,\delta x_0), \dots X_i(z,\delta x_0), \dots, X_n(z,\delta x_0))^T\} \quad (\star)$$

gdzie $\Delta_{ij}(z)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej z stopnia $<= n$ jako element macierzy dołączonej $(zI - A)^D$, a $\Delta(z) = det(zI - A)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej z stopnia n. Do badania wyrażenia $(\star)$ można zastosować metodę rozkładu na ułamki proste. W tym celu wyznaczamy **wartości własne** $z_1, z_2, \dots, z_n$ macierzy stanu A układu dyskretnego tj. pierwiastki równania $det(zI - A) = 0$.

W zależności od charakteru tych wartości własnych uzyskujemy składowe rozwiązania o różnej postaci.

• 1. Wartości własne $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy A są jednokrotne rzeczywiste - wtedy

$$X_i(z, \delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)z}{z - z_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)z}{z - z_2} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)z}{z - z_n},$$

gdzie $c_{ij}(\delta x_0$ są stałymi zależnymi od zaburzenia warunku początkowego. W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k, \delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)z_1^k + c_{i2}(\delta x_0)z_2^k + ... + c_{in}(\delta x_0)z_n^k.$$

• 2. Wśród wartości własnych $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A jest r-krotna wartość własna rzeczywista - wtedy

$$X_i(z, \delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)z}{z - z_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)z}{(z - z_2)^2} + ... + \frac{c_{ir}(\delta x_0)z}{(z - z_r)^r}$$
$$+ ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)z}{z - z_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k, \delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)z_1^k + c_{i2}(\delta x_0)kz_1^k + ... + c_{ir}(\delta x_0)k^{r-1}z_1^k$$
$$+ ... + c_{in}(\delta x_0)z_n^k.$$

• 3. Wśród wartości własnych $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A jest para wartości zespolonych sprzężonych $z_{1,2} = \sigma e^{\pm \jmath\omega}$ - wtedy

$$X_i(z, \delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)z}{z - \sigma e^{\jmath\omega}} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s - \sigma e^{-\jmath\omega}} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)z}{z - z_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k, \delta x_0) = \tilde{c}_{i1}(\delta x_0)\sigma^k cos\ \omega k + \tilde{c}_{i2}(\delta x_0)\sigma^k sin\ \omega k$$

$$+ ... + c_{in}(\delta x_0) z_n^k.$$

• 4. Wśród wartości własnych $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A jest para r-krotnych wartości zespolonych sprzężonych $z_{1,2} = \sigma e^{\pm \jmath\omega}$ - wtedy

$$X_i(z, \delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{z - \sigma e^{\jmath\omega}} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{z - \sigma e^{-\jmath\omega}} + ...$$

$$+ \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{(z - \sigma e^{\jmath\omega})^r} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{(z - \sigma e^{-\jmath\omega})^r}$$

$$+ ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{z - z_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k, \delta x_0) = \tilde{c}_{i1}(\delta x_0)\sigma^k cos\ \omega k + \tilde{c}_{i2}(\delta x_0)\sigma^k sin\ \omega k + ...$$

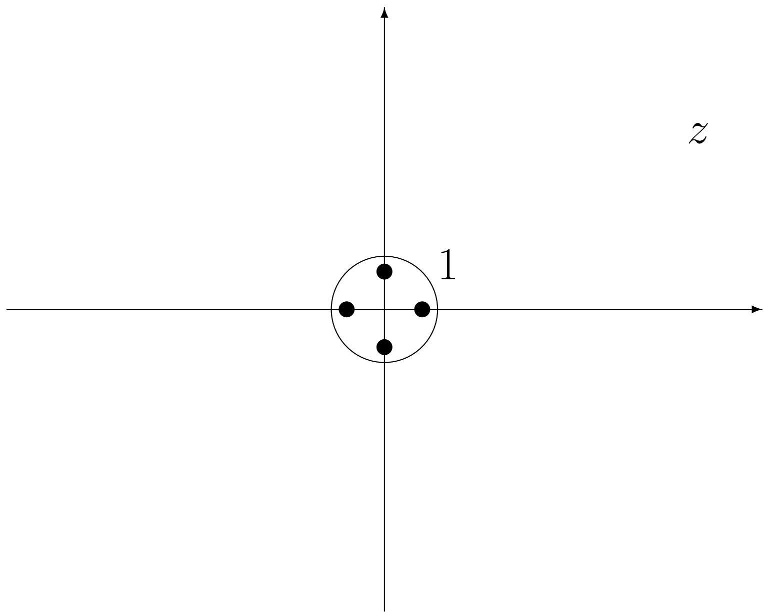
$$+ \tilde{c}_{i,2r-1}(\delta x_0) k^{r-1} \sigma^k cos\ \omega k + \tilde{c}_{i2r}(\delta x_0) k^{r-1} \sigma^k sin\ \omega k$$

$$+ ... + c_{in}(\delta x_0) z_n^k.$$

Biorąc pod uwagę zależność

$$\lim_{k\to\infty} k^p z^k = 0, \quad p = 1, 2, ...; |z| < 1,$$

wnioskujemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym jest położenie wszystkich wartości własnych $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A układu dyskretnego wewnątrz okręgu jednostkowego płaszczyzny zmiennej zespolonej z tj. spełnienie warunku $|z_i| < 1, \quad i = 1, ..., n$.



Lemat: Transformacja $z = (s+1)/(s-1), \ s \neq 1$ przeprowadza koło jednostkowe płaszczyzny z w lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej s.

Dowód: Oznaczmy $s = a + \jmath\, b$. Z zależności

$$|z| = |(a + \jmath\, b + 1)/(a + \jmath\, b - 1)| < 1$$

wynika, że

$$\big((a+1)^2 + b^2 < (a-1)^2 + b^2\big)$$
$$\Rightarrow (2a < -2a) \Rightarrow (4a < 0) \Rightarrow (a = Re(s) < 0).$$

Tak więc podstawiając $z = (s+1)/(s-1)$ do równania $det(zI - A) = 0$ sprowadzamy badanie stabilności dyskretnych układów sterowania do kryterium Hurwitza.

Przykład: Macierz stanu zredukowanego układu sterowania z czasem dyskretnym ma postać

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ \beta^2 & -\alpha \end{pmatrix},$$

przy czym α i β są parametrami układu. Aby zbadać dla jakich parametrów układ sterowania z czasem dyskretnym jest asymptotycznie stabilny zapisujemy równanie wartości własnych macierzy stanu

$$det(zI - A) = det \begin{pmatrix} z + \alpha & 1 \\ -\beta^2 & z + \alpha \end{pmatrix} = 0.$$

Określamy następnie wielomian charakterystyczny układu w postaci standardowej

$$\Delta(z) = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Dokonujemy podstawienia $z = (s+1)/(s-1)$ uzyskując

$$(\frac{s+1}{s-1})^2 + 2\alpha\frac{s+1}{s-1} + \alpha^2 + \beta^2 = 0/\cdot(s-1)^2.$$

Określamy następnie wielomian charakterystyczny układu względem zmiennej s:

$$\big(1+2\alpha+\alpha^2+\beta^2\big)s^2+(2-2(\alpha^2+\beta^2))s+1-2\alpha+\alpha^2+\beta^2 = 0.$$

co oznacza, że $a_2 = 1+2\alpha+\alpha^2+\beta^2$, $a_1 = 2-2(\alpha^2+\beta^2)$ i $a_0 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2$.

Ponieważ $a_2 = (1+\alpha)^2 + \beta^2$ i $a_0 = (1-\alpha)^2 + \beta^2$, więc kryterium stabilności Hurwitza określa obszar stabilności parametrycznej jako wnętrze koła

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1.$$

Stabilność dyskretnych liniowych układów sterowania w układzie zamkniętym sprowadza się do badania, czy wartości własne macierzy stanu zamkniętego układu dyskretnego

$$\tilde{A} = A + BKC$$

leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie z.

Zanikanie składowej swobodnej rozwiązania równania stanu liniowego dyskretnego układu sterowania

$$\lim_{k\to\infty} A^k \delta x_0 = 0$$

dla dowolnego zaburzenia stanu początkowego implikuje zbieżność do zera elementów macierzy A^k.

Praktyczne kryterium badania stabilności dyskretnych układów sterowania uzyskujemy obliczając potęgi macierzy stanu układu dyskretnego podnosząc je do kwadratu.

$$A,\ A^2 = AA,\ A^4 = A^2A^2,\ A^8 = A^4A^4,\ A^{16} = A^8A^8 ...$$

Jeśli elementy potęgowanych macierzy dążą do zera, to układ dyskretny jest asymptotycznie stabilny. Metoda ta nazywana jest **metodą szybkiego potęgowania macierzy**. Wyznacza ona ciąg macierzy

$$A,\ A^2,\ A^4,\ A^8, ..., A^{2^k}.$$

Oznaczmy elementy ostatniej macierzy jako $(a_{ij})_{2^k}$.

Warunek stopu metody szybkiego potęgowania macierzy dla badania stabilności liniowych dyskretnych układów sterowania przybiera postać

$$|(a_{ij})_{2^k}| < \frac{1}{n},\quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

gdzie n jest wymiarem kwadratowej macierzy stanu A.

Jeśli warunek stopu jest spełniony, to elementy macierzy A^{2^k} spełniają warunki

$$|(a_{ij})_{2^k}| \leq \frac{(c_{ij})_{2^k}}{n}, \quad i,j = 1,2,...,n$$

dla stałych $(c_{ij})_{2^k} < 1$. Spełniają one więc warunek

$$|(a_{ij})_{2^k}| \leq \frac{(c)_{2^k}}{n}, \quad i,j = 1,2,...,n$$

dla stałej $(c)_{2^k} = \max_{ij}(c_{ij})_{2^k} < 1$. Elementy macierzy $A^{2^{k+1}}$ spełniają oszacowania

$$|(a_{ij})_{2^{k+1}}| \leq n\frac{(c)_{2^k}}{n}\frac{(c)_{2^k}}{n} = \frac{(c)_{2^{k+1}}}{n},$$

gdzie $(c)_{2^{k+1}} = (c)_{2^k}(c)_{2^k} < (c)_{2^k} < 1$. Oszacowania te dążą monotonicznie do zera dla $k \to \infty$.

Przykład: Niech jednorodne równanie stanu liniowego dyskretnego układu sterowania ma postać

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x(k)$$

Warunek stopu metody szybkiego potęgowania macierzy ma w tym przypadku postać

$$|(a_{ij})_{2^k}| < \frac{1}{3}, \quad i,j = 1,2,3; \quad (n = 3).$$

Elementy macierzy A $(k = 0)$ nie spełniają warunku stopu metody szybkiego potęgowania macierzy, gdyż $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Obliczamy

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dla $k = 1$ warunek stopu metody szybkiego potęgowania macierzy jest spełniony. Oznacza to, że rozpatrywany liniowy dyskretny układ sterowania jest asymptotycznie stabilny.

Niech liniowy dyskretny stacjonarny układ sterowania będzie opisywany singularnym równaniem stanu

$$Ex(k+1) = Ax(k)+Bu(k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad x(0) = x_0,$$

przy czym $E \in R^{n\times n}$ i $A \in R^{n\times n}$ są macierzami kwadratowymi o tych samych wymiarach. Równania takie można rozwiązywać metodami rachunku operatorowego. Stosując przekształcenie $\mathcal{Z}$ do obydwu stron ostatniego równania uzyskujemy

$$E(zX(z)-zx(0)) = AX(z) = AX(z)+BU(z), \quad z \in \mathcal{C},$$

gdzie $X(z)$ i $U(z)$ są dyskretnymi transformatami trajektorii stanu i sterowania, a $\mathcal{C}$ jest płaszczyzną zespoloną. Niech $rank(zE - A) = n$ dla $z \in \mathcal{C}$. Z ostatniego równania wynika, że

$$X(z) = (zE - A)^{-1}Ezx(0) + (zE - A)^{-1}BU(z)$$

czyli

$$X(z) = \bar{X}(z) + \tilde{X}(z).$$

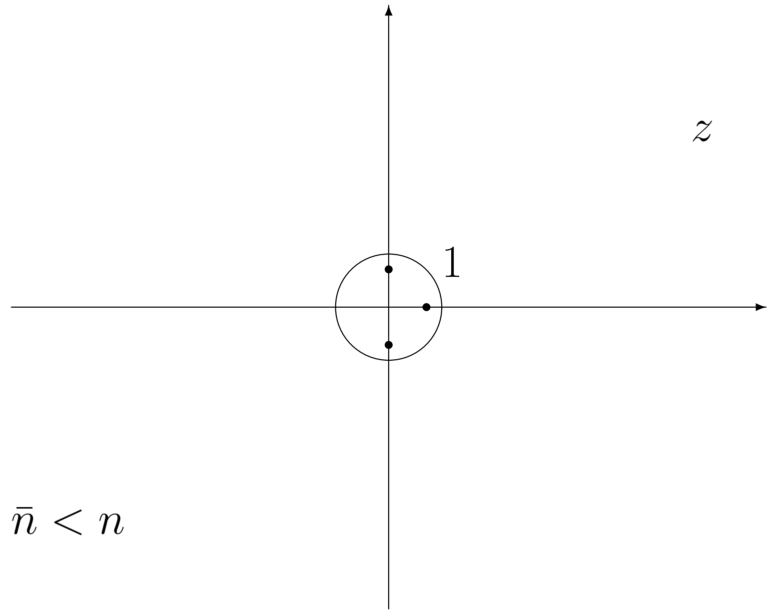
Rozwiązanie ma w dziedzinie operatorowej ma składową pochodzącą od warunku początkowego $\bar{X}(z)$ i składową pochodzącą od sterowania $\tilde{X}(z)$. Pierwsza składowa w dziedzinie czasu dyskretnego wyrazi się jako

$$\bar{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{(zE - A)^{-1}Ez\}\delta x_0$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\{(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(z)z\delta x_{j0}/\Delta(z))_{i=1,\ldots,n}\} =$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{(X_1(z,\delta x_0), \ldots X_i(z,\delta x_0), \ldots, X_n(z,\delta x_0))^T\} \quad (\star)$$

gdzie $\Delta_{ij}(z)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej z stopnia $<= n$ jako element macierzy dołączonej $(zI - A)^D E$ pomnożonej przez Ez, a $\Delta(z) = det(zE - A)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej z stopnia $\bar{n}$. Do badania wyrażenia $(\star)$ można zastosować metodę rozkładu na ułamki proste. W tym celu wyznaczamy pierwiastki $z_1, z_2, ..., z_{\bar{n}}$ równania charakterystycznego singularnego układu dyskretnego tj. pierwiastki równania $det(zE - A) = 0$. Liczba tych pierwiastków jest na ogół mniejsza od liczby wartości własnych macierzy A. Metoda rozkładu na ułamki proste implikuje w tym przypadku warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej: wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego dyskretnego singularnego układu sterowania $det(sE - A) = 0$ powinny leżeć wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z.



Stabilność układów zlinearyzowanych

Warunki stabilności liniowych układów sterowania można stosować do badania stabilności układów nieliniowych w małym otoczeniu wyróżnionej trajektorii stanu. Takimi wyróżnionymi trajektoriami stanu mogą być m.in. trajektorie stałe (np. optymalny statyczny punkt pracy układu) lub trajektorie okresowe (np. optymalna cykliczna trajektoria układu). Założenie o funkcjonowaniu procesu w małym otoczeniu wymienionych trajektorii pozwala uprościć model matematyczny układu rozwijając nieliniowe funkcje w szereg Taylora pierwszego rzędu i przejść do modelu zlinearyzowanego względem zmiennych przyrostowych czyli małych odchyleń od trajektorii wyróżnionej.

Niech $\delta x(t), \delta u(t)$ i $\bar{y}$ będą małymi odchyleniami stanu,sterowania i wyjścia od statycznego punktu pracy $\bar{x}, \bar{u}$ i$\bar{y}$ układu. Nieliniowy opis układu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ y(t) = g(x(t), u(t))$$

linearyzujemy w punkcie pracy $(\bar{x}, \bar{u})$

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}+\delta x(t)) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}\delta u(t) + r_f(\delta x(t), \delta u(t)),$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}\delta u(t)$$

$$+r_g(\delta x(t), \delta u(t)),$$

gdzie $r_f(\delta x(t), \delta u(t))$ i $r_g(\delta x(t), \delta u(t))$ są nieliniowymi członami rozwinięć (resztami z rozwinięcia w szereg Taylora w szereg pierwszego rzędu) spełniającymi warunki

$$\lim_{||\delta x|| \to 0} \frac{r_f(\delta x(t), \delta u(t))}{||\delta x||} = 0, \quad \lim_{||\delta u|| \to 0} \frac{r_f(\delta x(t), \delta u(t))}{||\delta u||} = 0.$$

Reszty te są nieskończenie małymi rzędu wyższego niż odpowiednio $||\delta x||$ i $||\delta u||$. Można je pominąć dla małych odchyleń od punktu pracy i przejść do modelu zlinearyzowanego

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} \delta u(t),$$

$$\delta y(t) = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} \delta u(t).$$

Podstawą do badania stabilności układu zlinearyzowanego jest weryfikacja położenia wartości własnych macierzy Jacobiego

$$A = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} = \Big(\frac{\partial f_i(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_j}\Big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

W przypadku wyróżnionego cyklicznego sposobu prowadzenia procesu macierz stanu układu zlinearyzowanego przybiera niestacjonarną postać okresową

$$A(t) = \frac{\partial f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} = \Big(\frac{\partial f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x_j}\Big)_{i,j=1,\ldots,n},$$

gdzie $\tilde{x}(t)$ jest cykliczną trajektorią stanu, a $\tilde{u}(t)$ jest cyklicznym sterowaniem.