

Uogólnione modele układów sterowania

Różniczkowo-algebraiczne modele układów sterowania

Analiza własności wielu układów sterowania wymaga uogólnienia modeli procesów zachodzących w tych układach. Wprowadzane jest pojęcie uogólnionego stanu obiektu sterowania

$$x(t) = \begin{pmatrix} x^r(t) \\ x^a(t) \end{pmatrix},$$

który posiada składową w postaci **stanu różniczkowego** $x^r(t)$ oraz składową w postaci **stanu algebraicznego** $x^a(t)$. Stan różniczkowy może być związany z wolnozmiennymi składowymi procesami, zaś stan algebraiczny może być związany z szybkozmiennymi składowymi procesami. Uogólniony model obiektu sterowania obejmuje **równanie różniczkowo-algebraiczne** (RA) stanu uogólnionego

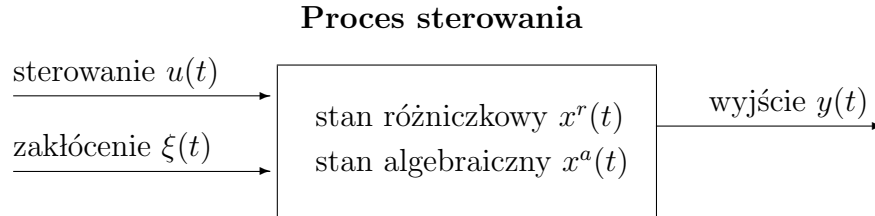
$$\dot{x}^r(t) = f^r(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x^r(t_0) = x_0^r,$$

$$f^a(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t) = 0, \quad t \in [t_0, t_f]$$

oraz równanie wyjścia

$$y(t) = g(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

gdzie stan różniczkowy $x^r(t) \in R^{n_{x^r}}$ spełnia równanie różniczkowe jego dynamiki, stan algebraiczny $x^a(t) \in R^{n_{x^a}}$ spełnia równanie algebraiczne jego dynamiki, $u(t) \in R^{n_u}$ jest sterowaniem obiektu, $\xi(t)$ jest zakłóceniem obiektu, a $y(t)$ jest wyjściem obiektu.



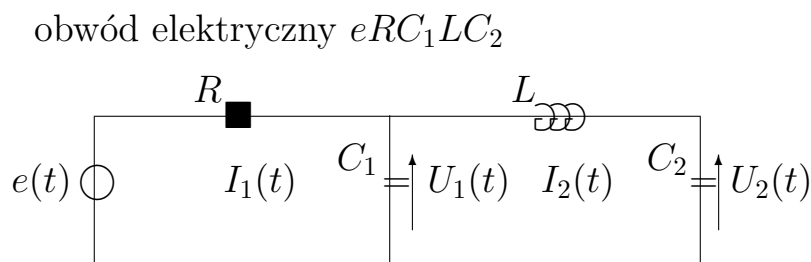
Stan różniczkowy zwany stanem wolnozmiennym opisuje np. ewolucję inercyjnej ciekłej fazy chemicznego procesu produkcyjnego, a stan algebraiczny zwany stanem szybkozmiennym opisuje ewolucję jego bezinercyjnej fazy gazowej. Równanie algebraiczne może określać charakterystyczne warunki prowadzenia procesu np. postulat równowagi termodynamicznej procesu lub jego elektroneutralności. W innych przypadkach odzwierciedla ono algebraiczne zależności matematyczne między zmiennymi procesowymi. Model różniczkowo-algebraiczny może być reinterpretacją modelu różniczkowego. W niektórych przypadkach równanie RA odnosi się tylko do stanu różniczkowego, a stan algebraiczny nie jest określony lub jest wyeliminowany. Równanie algebraiczne jest w tym przypadku narzucone na zmienne różniczkowe i determinuje charakterystyczny sposób funkcjonowania procesu.

W literaturze anglojęzycznej modele procesów sterowania w postaci równań różniczkowych zwyczajnych nazywane są modelami typu ODE (Ordinary Differential Equation), zaś modele procesów sterowania w postaci równań różniczkowo-algebraicznych nazywane są modelami typu DAE (Differential Algebraic Equation).

Z przykładami uogólnionych modeli procesów sterowania i problemów sterowania nimi mamy do czynienia w wielu dziedzinach techniki i technologii takich jak np. układy elektryczne i elek-

troniczne, układy mechaniczne, chemiczne procesy produkcyjne, procesy biotechnologiczne, a także systemy złożone. W każdej z tych dziedzin stosowane są różne zwyczajowe oznaczenia wielkości fizyko-chemicznych charakteryzujących proces. Przeprowadzimy stadaryzację opisu różnych problemów sterowania z wielu dziedzin pokazując, że z punktu widzenia teorii sterowania są one szczególnymi przypadkami ogólnego problemu optymalizacji procesów różniczkowo-algebraicznych.

Modele obwodów elektrycznych i elektronicznych przybierają w wielu przypadkach postać równań różniczkowo-algebraicznych. Niech będzie dany obwód elektryczny ze źródłem napięcia $e(t)$, rezystancją R , kondensatorami C_1 i C_2 oraz z indukcyjnością L . Składa się on z dwóch szeregowo połączonych podobwodów eRC_1 oraz C_1LC_2 . Zmiennymi stanu są napięcia $U_1(t)$ i $U_2(t)$ na kondensatorach oraz natężenia prądu I_1 i I_2 w rezystancji i w indukcyjności. Wyjściem jest napięcie $U_2(t)$ na kondensatorze C_2 .



Na podstawie praw Kirchhoffa zapisujemy równania dla napięć U_i i prądów I_i ($i = 1, 2$) dla $t \geq t_0$:

$$\dot{U}_1(t) = \frac{1}{C_1} I_1(t),$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2(t) &= \frac{1}{C_2}I_2(t), \\ \dot{I}_2(t) &= \frac{1}{L}(U_1(t) - U_2(t)), \\ U_1(t) + RI_1(t) &= e(t).\end{aligned}$$

Uzyskujemy trzy równania różniczkowe i jedno równanie algebraiczne.

Celem sterowania może być zapewnienie przebiegu napięcia $U_2(t)$ zgodnego z programem jego zmienności $U_{20}(t)$ przy minimalnych stratach energetycznych źródła napięciowego (zakładany jest długi horyzont czasowy sterowania $[t_0, t_f] \approx [0, \infty]$)

$$\int_0^\infty ((U_2(t) - U_{20}(t))^2 + E^2(t))dt$$

Zmiennymi różniczkowymi stanu są napięcia $x_1^r(t) \doteq U_1(t)$ i $x_2^r(t) \doteq U_2(t)$ oraz prąd $x_3^r(t) \doteq I_2(t)$. Zmienną algebraiczną stanu jest prąd $x^a(t) \doteq I_1(t)$, sterowaniem jest napięcie źródła $u(t) \doteq e(t)$, a wyjściem jest napięcie $y(t) \doteq U_2(t)$ na kondensatorze C_2 .

Zapisujemy model układu w postaci standardowej

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^r(t) &= \frac{1}{C_1}x^a(t), \\ \dot{x}_2^r(t) &= \frac{1}{C_2}x_3^r(t), \\ \dot{x}_3^r(t) &= \frac{1}{L}(x_1^r(t) - x_2^r(t)), \\ x_1^r(t) + Rx^a(t) - u(t) &= 0.\end{aligned}$$

Równanie algebraiczne jest bilansem napięć w podobwodzie ze źródłem napięciowym. Cel sterowania oznacza minimalizację funkcjonału kwadratowego

$$Q(x^r, x^a, u) \doteq \int_0^\infty ((x_2^r(t) - x_{20}^r(t))^2 + u^2(t))dt,$$

a problem minimalizacji tego funkcjonału z uwzględnieniem równań stanu można określić mianem liniowo-kwadratowej optymalizacji różniczkowo-algebraicznej (linear-quadratic DAE optimization).

W **układach mechanicznych** analizowany jest ruch wahadłowy ciała o masie m podwieszonoego za pomocą pręta (linki, sprężyny) o długości l . Niech (p_1, p_2) będą współrzędnymi pozycyjnymi ciała m (poziomą i pionową), zaś (v_1, v_2) niech będą jego prędkościami w kartezjańskim układzie wyróżnionej płaszczyzny jego ruchu. Równania wahadłowego ruchu ciała m pod wpływem siły $F(t)$ (oddziaływanie elektromagnetyczne, naprężenie sprężyny) mają postać dla $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}\dot{p}_1(t) &= v_1(t), \\ \dot{p}_2(t) &= v_2(t), \\ \dot{v}_1(t) &= -\frac{p_1(t)}{m}F(t), \\ \dot{v}_2(t) &= -\frac{p_2(t)}{m}F(t) - g,\end{aligned}$$

gdzie g jest stałą grawitacyjną. Równania te uzupełniamy warunkiem poruszania się ciała m po trajektorii kołowej

$$p_1^2(t) + p_2^2(t) = l^2.$$

Celem sterowania dla rozważanego układu mechanicznego może być spełnienie zadanego programu zmian prędkości ruchu wahadłowego przy minimalnych stratach na sterowanie

$$\int_{t_0}^{t_f} ((v_1(t) - v_{10}(t))^2 + (v_2(t) - v_{20}(t))^2 + F^2(t))dt.$$

Oznaczając różniczkowe zmienne stanu przez

$$x_1^r(t) \doteq p_1(t), x_2^r(t) \doteq p_2(t), x_3^r(t) \doteq v_1(t), x_4^r(t) \doteq v_2(t),$$

a przez $u(t) \doteq F(t)$ sterowanie, przekształcamy model układu do postaci standardowej

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^r(t) &= x_3^r(t), \\ \dot{x}_2^r(t) &= x_4^r(t), \\ \dot{x}_3^r(t) &= -\frac{x_1^r(t)}{m}u(t), \\ \dot{x}_4^r(t) &= -\frac{x_2^r(t)}{m}u(t) - g, \\ x_1^r(t)^2 + x_2^r(t)^2 &= l^2.\end{aligned}$$

Uzyskujemy więc dla opisu kołowego ruchu wahadła m układ równań różniczkowo-algebraicznych określony wyłącznie przez różniczkowe zmienne stanu, na które jest jednak nałożony warunek algebraiczny. Cel sterowania oznacza minimalizację funkcjonału kwadratowego

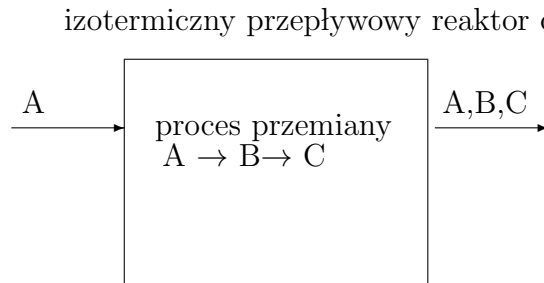
$$Q(x^r, u) \doteq \int_0^\infty ((x_3^r(t) - x_{30}^r(t))^2 + (x_4^r(t) - x_{40}^r(t))^2 + u^2(t))dt$$

z uwzględnieniem liniowo-kwadratowych ograniczeń (generalized linear-quadratic DAE optimization).

W dziedzinie **chemicznych procesów produkcyjnych** analizowane są procesy realizowane w reaktorach przepływowych i wsadowych.

Niech w przepływowym reaktorze chemicznym będzie prowadzony proces produkcyjny przemiany substratu $A \rightarrow B \rightarrow C$ w

produkt użyteczny C z produktem pośrednim B .



Określone jest zmienne w czasie zapotrzebowanie na produkt użyteczny $s(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, przy czym $s(t_0) = 0$. Model procesu przybiera postać

$$\dot{c}_A(t) = q(c_{A_0}(t) - c_A(t)) - k_1 c_A^2(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad c_A(t_0) = 1,$$

$$\dot{c}_B(t) = -q c_B(t) + k_1 c_A^2(t) - k_2 c_B(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad c_B(t_0) = 0,$$

$$c_A(t) + c_B(t) + c_C(t) = 1, \quad t \in [t_0, t_f],$$

$$c_C(t) = s(t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

gdzie $c_A(t)$, $c_B(t)$, $c_C(t)$ oznaczają stężenia substancji A , B , C w reaktorze w chwili t , c_{A_0} oznacza stężenie wejściowe substratu, q jest natężeniem przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor, zaś k_1 i k_2 są współczynnikami szybkości reakcji. Proces ma charakter izotermiczny. W modelu tym zmiennymi różniczkowymi stanu są $c_A(t)$ i $c_B(t)$. Spełniają one dwa równania różniczkowe dynamiki procesu. Rolę algebraicznej zmiennej stanu odgrywa w rozważanym modelu zmienna $c_C(t)$ pojawiająca się w dwóch równaniach algebraicznych. Równanie trzecie jest tzw. równaniem zamykającym procesu, które wprowadza normalizację zmiennych procesowych - suma stężeń składników jest stała i znormalizowana na poziomie jednostkowym.

Warunek początkowy dla algebraicznej zmiennej stanu powinien być zgodny z warunkami początkowymi dla różniczkowych zmiennych stanu. W rozważanym przykładzie określenie tego warunku jest oczywiste $c_C(t_0) = 0$, co oznacza, że w momencie początkowym nie dysponujemy produktem użytecznym - będzie on wytwarzany w trakcie prowadzenia procesu. W innych przykładach określenie warunku zgodności równania algebraicznego może być trudnym zadaniem wymagającym zastosowania metody Newtona do rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych.

Cel sterowania dla rozpatrywanego procesu może być określony jako zapewnienie zadanego programu produkcji składnika użytecznego z równoczesną minimalizacją sumarycznego zużycia surowca

$$\int_{t_0}^{t_f} qc_{A_0}(t)dt.$$

Wprowadzając oznaczenia $x_1^r(t) \doteq c_A(t)$, $x_2^r(t) \doteq c_B(t)$ dla różniczkowych zmiennych stanu i $x^a(t) \doteq c_C(t)$ dla algebraicznej zmiennej stanu, zaś $u(t) \doteq c_{A_0}(t)$ dla sterowania, przedstawimy rozpatrywany model w standardowej postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^r(t) &= q(u(t) - x_1^r(t)) - k_1x_1^r(t)^2, \quad t \in [t_0, t_f], \\ \dot{x}_2^r(t) &= -qx_2^r(t) + k_1x_1^r(t)^2 - k_2x_2^r(t), \quad t \in [t_0, t_f], \\ x_1^r(t) + x_2^r(t) + x^a(t) &= 1, \quad t \in [t_0, t_f], \\ x^a(t) &= s(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

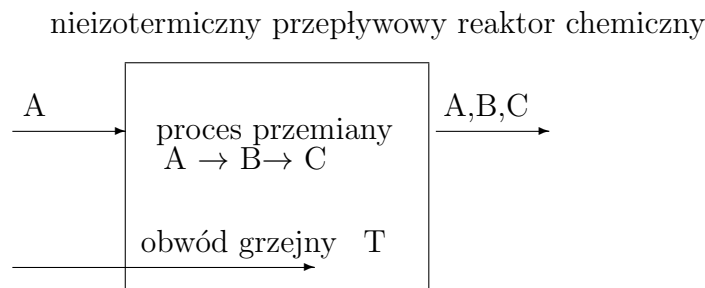
Podstawiając zmienną algebraiczną stanu z czwartego równania do trzeciego równania uzyskujemy model zredukowany

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^r(t) &= q(u(t) - x_1^r(t)) - k_1x_1^r(t)^2, \quad t \in [t_0, t_f], \\ \dot{x}_2^r(t) &= -qx_2^r(t) + k_1x_1^r(t)^2 - k_2x_2^r(t), \quad t \in [t_0, t_f], \\ x_1^r(t) + x_2^r(t) &= 1 - s(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

W ostatnim modelu mamy do czynienia tylko z różniczkowymi zmiennymi stanu. Oprócz równań różniczkowych spełniają one dynamiczne równanie algebraiczne określające dodatkowy warunek prowadzenia procesu gwarantujący uzyskiwanie produktu użytecznego zgodnie z określonym programem. Cel optymalizacji procesu przybiera postać

$$Q(x^r, x^a, u) \doteq \int_{t_0}^{t_f} qu(t)dt.$$

Założmy, że w rozpatrywanym przykładzie reakcje $A \rightarrow B$ i $B \rightarrow C$ są egzotermiczne z ciepłami reakcji h_1 i h_2 , a temperatura procesu $T(t)$ jest kontrolowana za pomocą czynnika chłodzącego przepływającego przez płaszcz chłodzący reaktora z natężeniem $q_c(t)$ i temperaturą $T_c(t)$. Chwilowe zapotrzebowanie na produkt użyteczny nie jest zadane.



Model procesu zapisujemy jako układ równań różniczkowo-algebraicznych rozpatrywany w przedziale $[t_0, t_f]$

$$\begin{aligned} \dot{c}_A(t) &= q(c_{A_0}(t) - c_A(t)) - k_1 e^{-\frac{\beta_1}{T(t)}} c_A^2(t), \\ \dot{c}_B(t) &= -q c_B(t) + k_1 e^{-\frac{\beta_1}{T(t)}} c_A^2(t) - k_2 e^{-\frac{\beta_2}{T(t)}} c_B(t), \\ \dot{T}(t) &= q(T_0 - T(t)) + h_1 e^{-\frac{\beta_1}{T(t)}} c_A^2(t) + h_2 e^{-\frac{\beta_2}{T(t)}} c_B(t) - q_c(t)(T(t) - T_c), \\ c_A(t) + c_B(t) + c_C(t) &= 1, \end{aligned}$$

gdzie trzecie równanie opisuje bilans cieplny reaktora. W tym przypadku równania różniczkowe procesu określone są za pomocą skomplikowanych nieliniowych eksponencjalno-potęgowych wyrażeń znacznie komplikujących ich rozwiązywanie. Nasila się zjawisko propagacji błędów i pojawiają się niestabilne przebiegi zmiennych stanu. Dlatego celowe może być wprowadzenie algebraicznych zmiennych stanu oznaczających szybkości reakcji $\varkappa_1(t)$ i $\varkappa_2(t)$. Model procesu przepisujemy w postaci równoważnej

$$\begin{aligned}\dot{c}_A(t) &= q(c_{A_0}(t) - c_A(t)) - \varkappa_1(t), \\ \dot{c}_B(t) &= -qc_B(t) + \varkappa_1(t) - \varkappa_2(t), \\ \dot{T}(t) &= q(T_0 - T(t)) + \frac{h_1}{k_1}\varkappa_1(t) + \frac{h_2}{k_2}\varkappa_2(t) - q_c(t)(T(t) - T_c), \\ c_A(t) + c_B(t) + c_C(t) &= 1, \\ \varkappa_1(t) &= k_1 e^{-\frac{\beta_1}{T(t)}} c_A^2(t), \\ \varkappa_2(t) &= k_2 e^{-\frac{\beta_2}{T(t)}} c_B(t).\end{aligned}$$

Równania różniczkowe w przekształconym modelu są liniowe względem zmiennych stanu, co istotnie ułatwia ich rozwiązywanie. Nieliniowości przerzucone są do równań algebraicznych. Wskaźnik jakości procesu obejmuje sumaryczne koszty surowca i chłodzenia oraz sumaryczną wartość produktu użytecznego

$$\int_{t_0}^{t_f} (\alpha_1 q c_{A_0}(t) + \alpha_2 q_c(t) - \beta c_C(t)) dt,$$

gdzie α_1 i α_2 są współczynnikami kosztów surowca i czynnika chłodzącego, a β jest współczynnikiem wartości produktu.

Wprowadzając oznaczenia $x_1^r(t) \doteq c_A(t)$, $x_2^r(t) \doteq c_B(t)$, $x_3^r(t) \doteq T(t)$ dla różniczkowych zmiennych stanu oraz $x_1^a(t) \doteq c_C(t)$, $x_2^a(t) \doteq \varkappa_1(t)$, $x_3^a(t) \doteq \varkappa_2(t)$ dla algebraicznych zmiennych stanu, zaś $u_1(t) \doteq$

$c_{A_0}(t), u_2(t) \doteq q_c(t)$ dla zmiennych sterujących, przedstawimy rozpatrywany model w standardowej postaci

$$\dot{x}_1^r(t) = q(u_1(t) - x_1^r(t)) - x_1^a(t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

$$\dot{x}_2^r(t) = -qx_2^r(t) + x_1^a(t) - x_2^a(t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

$$\dot{x}_3^r(t) = q(T_0 - x_3^r(t)) + \frac{h_1}{k_1}x_2^a(t) + \frac{h_2}{k_2}x_3^r(t) - u_2(t)(x_3^r(t) - T_c),$$

$$x_1^r(t) + x_2^r(t) + x_1^a(t) = 1,$$

$$x_1^a(t) = k_1 e^{-\frac{\beta_1}{x_3^r(t)}} x_1^r(t)^2,$$

$$x_2^a(t) = k_2 e^{-\frac{\beta_2}{x_3^r(t)}} x_2^r(t).$$

Tak więc część różniczkowa równań stanu została zasadniczo uproszczona, a część algebraiczna uległa komplikacji. Liczba algebraicznych zmiennych stanu została zwiększona do trzech zmiennych, a równania algebraiczne przybrały postać nieliniową. Możliwe jest też podejście pośrednie upraszczające niektóre nieliniowości części różniczkowej modelu. Wyróżnimy funkcje wpływu temperatury na szybkość reakcji $\theta_1(t) \doteq k_1 e^{-\frac{\beta_1}{T(t)}}$, $\theta_2(t) \doteq k_2 e^{-\frac{\beta_2}{T(t)}}$ jako algebraiczne zmienne stanu. Prowadzi to do równań różniczkowych stanu z nieliniowościami multiplikatywnymi

$$\dot{c}_A(t) = q(c_{A_0}(t) - c_A(t)) - \theta_1(t)c_A^2(t),$$

$$\dot{c}_B(t) = -qc_B(t) + \theta_1(t)c_A^2(t) - \theta_2(t)c_B(t),$$

$$\dot{T}(t) = q(T_0 - T(t)) + \frac{h_1}{k_1}\theta_1(t)c_A^2(t) + \frac{h_2}{k_2}\theta_2(t)c_B(t) - q_c(t)(T(t) - T_c),$$

$$c_A(t) + c_B(t) + c_C(t) = 1,$$

$$\theta_1(t) = k_1 e^{-\frac{\beta_1}{T(t)}},$$

$$\theta_2(t) = k_2 e^{-\frac{\beta_2}{T(t)}}.$$

Wprowadzając oznaczenia $x_1^r(t) \doteq c_A(t)$, $x_2^r(t) \doteq c_B(t)$, $x_3^r(t) \doteq T(t)$ dla różniczkowych zmiennych stanu oraz $x_1^a(t) \doteq c_C(t)$, $x_2^a(t) \doteq$

$\theta_1(t), x_3^a(t) \doteq \theta_2(t)$ dla algebraicznych zmiennych stanu, zaś $u_1(t) \doteq c_{A_0}(t), u_2(t) \doteq q_c(t)$ dla zmiennych sterujących, przedstawimy rozpatrywany model w standardowej postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^r(t) &= q(u_1(t) - x_1^r(t)) - x_1^a(t)x_1^a(t)^2, \quad t \in [t_0, t_f], \\ \dot{x}_2^r(t) &= -qx_2^r(t) + x_1^a(t)x_1^r(t)^2 - x_2^a(t)x_2^r(t), \quad t \in [t_0, t_f], \\ \dot{x}_3^r(t) &= q(T_0 - x_3^r(t)) + \frac{h_1}{k_1}x_2^a(t)x_2^r(t)^2 + \frac{h_2}{k_2}x_3^a(t)x_2^r(t) - u_2(t)(x_3^r(t) - T_c), \\ x_1^r(t) + x_2^r(t) + x_1^a(t) &= 1, \\ x_1^a(t) &= k_1 e^{-\frac{\beta_1}{x_3^r(t)}}, \\ x_2^a(t) &= k_2 e^{-\frac{\beta_2}{x_3^r(t)}}. \end{aligned}$$

Od sposobu wyróżnienia części różniczkowej i algebraicznej modelu procesu może istotnie zależeć efektywność procedur numerycznych dla łącznego rozwiązywania równań różniczkowo-algebraicznych. Podkreślimy to jeszcze na przykładzie procesów biotechnologicznych, które w wielu przypadkach modelowane są z wykorzystaniem skomplikowanych funkcji wymiernych.

Do przepływowego bioreaktora doprowadzany jest substrat $S(t)$ (pożywka, odpady, ścieki), a w bioreaktorze zainstalowane są dwie konkurujące populacje mikrobiologiczne $P_1(t)$ i $P_2(t)$ przetwarzające substrat na biomasę $B(t)$. Chociaż wymienione wielkości traktowane są jako stężenia, to oznaczają one odmienne wielkości biofizyczne i nie są normalizowane na poziomie jednostkowym. Są one natomiast skalowane za pomocą odpowiednich współczynników.

Zależności między wielkościami biofizycznymi procesu: szybkości zmiany stężenia substratu i populacji są określone przez wielkości dopływu i odpływu bioskładników procesu oraz przez szybkość przetwarzania substratu przez populacje

$$\dot{S}(t) = q(S_0(t) - S(t)) - a_1 \frac{S(t)}{b_{10} + b_{11}S(t)} P_1(t)$$

$$\begin{aligned}
& -a_2 \frac{S(t)}{b_{20} + b_{21}S(t) + b_{22}S^2(t)} P_2(t), \\
\dot{P}_1(t) &= -qP_1(t) + \bar{a}_1 \frac{S(t)}{b_{10} + b_{11}S(t)} P_1(t), \\
\dot{P}_2(t) &= -qP_2(t) + \bar{a}_2 \frac{S(t)}{b_{20} + b_{21}S(t) + b_{22}S^2(t)} P_2(t), \\
\dot{B}(t) &= -qB(t) + \tilde{a}_1 \frac{S(t)}{b_{10} + b_{11}S(t)} P_1(t) \\
& + \tilde{a}_2 \frac{S(t)}{b_{20} + b_{21}S(t) + b_{22}S^2(t)} P_2(t),
\end{aligned}$$

gdzie $a_i, \bar{a}_i, \tilde{a}_i$ i b_{ij} są parametrami funkcji przyrostu populacji, zaś q jest natężeniem przepływu biomieszaniny przez bioreaktor. Model powyższy jest modelem różniczkowym z czterema różniczkowymi zmiennymi stanu. Prawe strony równań stanu mają charakterystyczną dla procesów biotechnologicznych skomplikowaną postać funkcji wymiernych. Model ten można przekształcić do następującej postaci różniczkowo-algebraicznej:

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= q(S_0(t) - S(t)) - a_1 h_1(t)P_1(t) - a_2 h_2(t)P_2(t), \\
\dot{P}_1(t) &= -qP_1(t) + \bar{a}_1 h_1 P_1(t), \\
\dot{P}_2(t) &= -qP_2(t) + \bar{a}_2 h_2 P_2(t), \\
\dot{B}(t) &= -qB(t) + \tilde{a}_1 h_1(t)P_1(t) + \tilde{a}_2 h_2(t)P_2(t), \\
h_1(t) &\doteq \frac{S(t)}{b_{10} + b_{11}S(t)}, \\
h_2(t) &\doteq \frac{S(t)}{b_{20} + b_{21}S(t) + b_{22}S^2(t)},
\end{aligned}$$

gdzie $h_1(t)$ i $h_2(t)$ są funkcjami przyrostu populacji. Optymalizacji podlega wartość średnia uzysku biomasy

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} qB(t)dt,$$

gdzie τ jest długością cyklu sterowania procesem.

Definiujemy różniczkowe zmienne stanu $x_1^r(t) \doteq S(t)$, $x_2^r(t) \doteq P_1(t)$, $x_3^r(t) \doteq P_2(t)$, $x_4^r(t) \doteq B(t)$, algebraiczne zmienne stanu $x_1^a(t) \doteq h_1(t)$, $x_2^a \doteq h_2(t)$ i sterowanie $u(t) \doteq S_0(t)$. Wprowadzamy różniczkowo-algebraiczną standaryzację opisu

$$\dot{x}_1^r(t) = q(u(t) - x_1^a(t)) - a_1 x_1^a(t)x_2^r(t) - a_2 x_2^a(t)x_3^r(t),$$

$$\dot{x}_2^r(t) = -qx_2^r(t) + \bar{a}_1 x_1^a(t)x_2^r(t),$$

$$\dot{x}_3^r(t) = -qx_3^r(t) + \bar{a}_2 x_2^a(t)x_3^r(t),$$

$$\dot{x}_4^r(t) = -qx_4^r(t) + \tilde{a}_1 x_1^a(t)x_2^r(t) + \tilde{a}_2 x_2^a(t)x_3^r(t),$$

$$x_1^a(t) = \frac{x_1^r(t)}{b_{10} + b_{11}x_1^r(t)},$$

$$x_2^a(t) = \frac{x_1^r(t)}{b_{20} + b_{21}x_1^r(t) + b_{22}x_1^r(t)^2}.$$

Uśredniony cel sterowania przybiera postać

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau qx_4^r(t)dt.$$

Dalszym ważnym przykładem równań różniczkowo-algebraicznych są **równania dynamiki systemów złożonych z interakcjami**. Niech $x_i(t)$ oznacza zmienną stanu i -tego podsystemu, $v_i(t)$ - jego zmienną interakcyjną, zaś $u_i(t)$ - jego zmienną sterującą. Dla układu N powiązanych podsystemów zapisujemy ich równania stanu

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), v_i(t), u_i(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (i = 1, \dots, N)$$

oraz ich równania interakcji

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(x_j(t), v_j(t), u_j(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (i = 1, \dots, N).$$

Celem sterowania jest globalny zysk z prowadzenia procesu w systemie złożonym

$$\sum_{i=1}^N Q_i(x_i(t), v_i(t), u_i(t))dt,$$

gdzie Q_i są funkcjami zysku dla poszczególnych podsystemów.

Definiujemy zmienne różniczkowe stanu jako zmienne stanu podsystemów $x_i^r(t) \doteq x_i(t)$ oraz zmienne algebraiczne jako zmienne interakcyjne podsystemów $x_i^a(t) \doteq v_i(t)$. Model systemu złożonego zapisujemy jako układ równań różniczkowo-algebraicznych

$$\dot{x}_i^r(t) = f_i(x_i^r(t), x_i^a(t), u_i(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$x_i^a(t) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(x_j^r(t), x_j^a(t), u_j(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (i = 1, \dots, N).$$

Funkcja celu przybiera postać

$$\sum_{i=1}^N Q_i(x_i^r(t), x_i^a(t), u_i(t))dt.$$

Problem nie zawiera już zmiennych interakcyjnych. Zostały one zastąpione algebraicznymi zmiennymi stanu. Problem przybrał postać złożonej optymalizacji różniczkowo-algebraicznej (large scale DAE optimization).

Przekształcanie i rozwiązywanie równań różniczkowo-algebraicznych

Równania różniczkowo-algebraiczne można przekształcić do postaci różniczkowej różniczkując równanie algebraiczne i wyznaczając pochodną zmiennej algebraicznej w funkcji pozostałych zmiennych:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f^a(x^r(t), x^a(t), u(t)) = 0 &\Rightarrow \\ \frac{\partial f^a}{\partial x^r}(t)\dot{x}^r(t) + \frac{\partial f^a}{\partial x^a}(t)\dot{x}^a(t) + \frac{\partial f^a}{\partial u}(t)\dot{u}(t) = 0 &\Rightarrow \\ \dot{x}^a(t) = -\left[\frac{\partial f^a}{\partial x^a}(t)\right]^{-1}\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^r}(t)\dot{x}^r(t) + \frac{\partial f^a}{\partial u}(t)\dot{u}(t)\right).\end{aligned}$$

Takie przekształcenie jest zawsze możliwe jeśli macierz $\frac{\partial f^a}{\partial x^a}(t)$ jest kwadratowa i nieosobliwa dla każdego $t \in [t_0, t_f]$. W tym przypadku jednokrotne różniczkowanie równania algebraicznego wystarczy do sprowadzenia modelu do postaci różniczkowej. W ogólnym przypadku trzeba wykonać wiele takich różniczkowań, gdyż macierz $\frac{\partial f^a}{\partial x^a}(t)$ może być osobliwa lub osobliwa dla niektórych $t \in [t_0, t_f]$, lub też może ona być macierzą prostokątną.

Definicja: Najmniejsza liczba różniczkowań równania algebraicznego procesu pozwalająca sprowadzić równanie RA do postaci różniczkowej nazywa się **indeksem równania RA**.

Rozważany przypadek z nieosobliwą macierzą $\frac{\partial f^a}{\partial x^a}(t)$ oznacza, że równanie RA jest indeksu pierwszego. Określenie indeksu jest stosowane do określania stopnia trudności rozwiązywania równania RA. Równanie takie jest uważane za tym trudniejsze, im wyższy jest jego indeks.

Do wyznaczania rozwiązań równań różniczkowo-algebraicznych stosowana jest metoda Newtona w różnych wersjach. Wersje te uogólniają podstawowy wariant metody Newtona dla rozwiązywa-

nia nieliniowych równań skalarnych $f(x) = 0$. Równanie to linearyzujemy w punkcie początkowym x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x - x_0 = -(f'(x_0))^{-1}f(x_0).$$

Obliczamy nowe przybliżenie rozwiązania na podstawie jego linearyzacji w punkcie początkowym

$$x_1 = x_0 - (f'(x_0))^{-1}f(x_0).$$

Dokonujemy linearyzacji równania w punkcie kolejnym x_1

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow x - x_1 = -(f'(x_1))^{-1}f(x_1).$$

Obliczamy nowe przybliżenie rozwiązania

$$x_2 = x_1 - (f'(x_1))^{-1}f(x_1) \dots$$

Wynika stąd iteracyjna metoda Newtona

$$x_{\kappa+1} = x_{\kappa} - (f'(x_{\kappa}))^{-1}f(x_{\kappa}), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Dla równań z argumentem wektorowym $x \in R^n$ pochodna $f'(x_{\kappa})$ oznacza macierz Jacobiego, tj.

$$f'(x_{\kappa}) = \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^{(j)}}(x_{\kappa}) \right)_{i,j=1,\dots,n},$$

gdzie obliczane są pochodne cząstkowe kolejnych składowych równania $f^{(i)}$ względem kolejnych składowych argumentu $x^{(i)}$.

Metoda Newtona jest zbieżna jeśli znane jest dobre przybliżenie początkowe. Takie przybliżenie wyznaczane jest na podstawie minimalizacji kwadratowej

$$\min_{x \in R^n} f^2(x).$$

Dla równania posiadającego rozwiązanie minimalna wartość funkcji celu ostatniego problemu jest zerowa. Zastosowanie do tego problemu np. gradientowego algorytmu optymalizacji pozwala oszacować jakość osiągniętego przybliżenia.

W literaturze anglojęzycznej numeryczne procedury rozwiązywania równań różniczkowych określane są mianem ODE Solvers, a równań różniczkowo-algebraicznych mianem DAE Solvers. Stosują one dyskretyzację czasu

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_f$$

z długością kroku $h_k = t_k - t_{k-1}$. Proste jednokrokowe procedury tego rodzaju stosują jawną aproksymację Eulera dla równań różniczkowych

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{h_k} - f(x(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

gdzie k jest numerem iteracji. Tak więc pochodną aproksymujemy lewostronnym ilorazem różnicowym. Przy zadanym stanie początkowym $x(t_0)$ wyznaczamy stan $x(t_1)$ z jawnej aproksymacji. Znając $x(t_1)$ w podobny sposób wyznaczamy $x(t_2)$ itd. Taka procedura jest mało dokładna i może być praktyczna dla bardzo prostych równań. Celem uzyskania dokładniejszych wyników stosujemy niejawną (wsteczną) aproksymację Eulera dla równań różniczkowych

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{h_k} - f(x(t_k), u(t_k), t_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Przy zadanym stanie początkowym $x(t_0)$ wyznaczamy stan $x(t_1)$ rozwiązując równanie aproksymujące tego stanu metodą Newtona. Znając $x(t_1)$ w podobny sposób wyznaczamy $x(t_2)$ itd.

Dla równań różniczkowo-algebraicznych jawna aproksymacja

Eulera przybiera postać

$$\frac{x^r(t_k) - x^r(t_{k-1})}{h_k} - f^r(x^r(t_{k-1}), x^a(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$f^a(x^r(t_{k-1}), x^a(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

W momencie początkowym wyznaczamy stan algebraiczny $x^a(t_0)$ zgodny z zadaniem początkowym stanem różniczkowym $x^r(t_0)$. Ogólnie biorąc wykorzystujemy w tym celu metodę Newtona. Następnie określamy $x(t_1)$ z jawnej aproksymacji równania różniczkowego. Postępowanie to powtarzamy dla $k = 2, 3, \dots$

Celem uzyskania dokładniejszych wyników stosujemy niejawną (wsteczną) aproksymację Eulera dla równań różniczkowo-algebraicznych

$$\frac{x^r(t_k) - x^r(t_{k-1})}{h_k} = f^r(x^r(t_k), x^a(t_k), u(t_k), t_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$f^a(x^r(t_k), x^a(t_k), u(t_k), t_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Równania RA rozwiązujemy łącznie metodą Newtona względem łącznego stanu $(x^r(t_k), x^a(t_k))$. Oczywiście takie postępowanie daje się zrealizować przy spełnieniu odpowiednich warunków dla realizowalności metody Newtona (dostatecznie dobre przybliżenia początkowe, odwracalność macierzy Jacobiego).

Metody wielokrokowe stosują dodatkową dyskretyzację czasu pomiędzy punktami t_{k-1} i t_k z drobnym krokiem $h_{kl} \doteq t_{kl} - t_{k-1,l}$

$$t_{k-1} = t_{k-1,0} < t_{k-1,1} < t_{k-1,2} < \dots < t_{k-1,l} < \dots < t_{k-1,m} < t_k.$$

Jawna wielokrokowa metoda aproksymacji równania różniczkowego wyznacza wartość $x^r(t_k)$ na podstawie znajomości $x^r(t_{k-1})$ oraz wielu wartości pośrednich $x^r(t_{k-1,l})$

$$x^r(t_k) = x^r(t_{k-1}) + \sum_{l=1}^m h_{kl} \phi_{kl}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\phi_{kl} \doteq f^r(x^r(t_{k-1,l}), u^r(t_{k-1,l}), t_{k-1,l}), \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie pośrednie wartości stanu różniczkowego obliczane są w punktach $t_{k-1,l}$

$$x^r(t_{k-1,l}) = x^r(t_{k-1}) + h_{kl}\phi_{k,l-1}, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

W szczególności zakładając $m = 4$ uzyskujemy przy pewnym wyborze drobnych kroków h_{kl} szeroko stosowaną metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu dla numerycznego rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych.

Jawna wielokrokowa metoda aproksymacji równania różniczkowo-algebraicznego wyznacza wartość $x^r(t_k)$ na podstawie znajomości $x^r(t_{k-1})$ oraz wielu wartości pośrednich stanu różniczkowego $x^r(t_{k-1,l})$ i algebraicznego $x^a(t_{k-1,l})$

$$x^r(t_k) = x^r(t_{k-1}) + \sum_{l=1}^m h_{kl}\phi_{kl}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\phi_{kl} \doteq f^r(x^r(t_{k-1,l}), x^a(t_{k-1,l}), u^r(t_{k-1,l}), t_{k-1,l}), \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie pośrednie wartości stanu różniczkowego i stanu algebraicznego obliczane są w punktach $t_{k-1,l}$

$$x^r(t_{k-1,l}) = x^r(t_{k-1}) + h_{kl}\phi_{k,l-1},$$

$$\phi_{k,l-1} \doteq f^r(x^r(t_{k-1,l-1}), x^a(t_{k-1,l-1}), u^r(t_{k-1,l-1}), t_{k-1,l-1}),$$

$$f^a(x^r(t_{k-1,l-1}), x^a(t_{k-1,l-1}), u^r(t_{k-1,l-1}), t_{k-1,l-1}) = 0,$$

$$l = 1, 2, \dots, m.$$

Równanie algebraiczne rozwiązywane jest względem $x^a(t_{k-1,l-1})$ przy zadanym $x^r(t_{k-1,l-1})$. Można więc powiedzieć, że ostatnia metoda jest półjawna. Jawne i półjawne metody wielokrokowe dają dobre wyniki dla szerokiej klasy równań różniczkowych stanu i równań różniczkowo-algebraicznych stanu.

W niejawnych metodach wartości pośrednie zmiennych stanu wyznaczone są w rezultacie łącznego rozwiązywania niejawnych równań różniczkowych i algebraicznych względem łącznego argumentu $(x^r(t_{k-1,l}), x^a(t_{k-1,l}))$ obejmującego stan różniczkowy i algebraiczny

$$x^r(t_{k-1,l}) = x^r(t_{k-1}) + h_{kl}\phi_{k,l},$$

$$\phi_{k,l} \doteq f^r(x^r(t_{k-1,l}), x^a(t_{k-1,l}), u^r(t_{k-1,l}), t_{k-1,l}),$$

$$f^a(x^r(t_{k-1,l}), x^a(t_{k-1,l}), u^r(t_{k-1,l}), t_{k-1,l}) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Metody takie mogą dawać bardzo dokładne wyniki. Wymagają jednak dużego nakładu obliczeń. Stosowane są m.in. do rozwiązywania tzw. sztywnych układów różniczkowo-algebraicznych o mało stabilnych przebiegach.

Numeryczne procedury typu ODE Solver i DAE Solver są zawarte w uniwersalnych programach obliczeniowych takich jak MATLAB i MATHEMATICA. Istnieje także wiele zaawansowanych wersji tych procedur powiązanych z metodami optymalizacji np. program MUSCOD. Szerokie omówienie takich procedur prezentują w swoich monografiach Biegler i Betts. Pozwalają one rozwiązywać problemy typu DAE Optimization z dziesiątkami, a nawet setkami tysięcy zmiennych.

Singularne modele procesów sterowania

Modele różniczkowo-algebraiczne procesów sterowania są szczególnym przypadkiem modeli singularnych. Niech będzie dany różniczkowo-algebraiczny model procesu sterowania

$$\dot{x}^r(t) = f^r(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x^r(t_0) = x_0^r,$$

$$f^a(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t) = 0, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Zestaw stanu różniczkowego i algebraicznego zapisywany jest w postaci stanu uogólnionego procesu

$$x(t) = \begin{pmatrix} x^r(t) \\ x^a(t) \end{pmatrix}.$$

Niech funkcja f ma w charakterze składowych prawe strony równania różniczkowo-algebraicznego

$$f(x(t), u(t), \xi(t), t) = \begin{pmatrix} f^r(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t) \\ f^a(x^r(t), x^a(t), u(t), \xi(t), t) \end{pmatrix}$$

i niech macierz E przyjmuje postać osobliwą

$$E = \begin{pmatrix} I & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix},$$

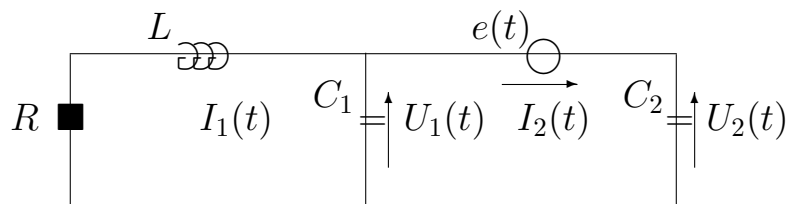
przy czym I jest macierzą jednostkową o wymiarach $n_{x^r} \times n_{x^r}$, zaś zerowe macierze O_1, O_2 i O_3 mają wymiary odpowiednio $n_{x^r} \times n_{x^a}$, $n_{x^a} \times n_{x^r}$ i $n_{x^a} \times n_{x^a}$. Równanie różniczkowo-algebraiczne procesu można przepisać w równoważnej postaci singularnej

$$E\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \xi(t), t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Ogólne singularne modele są charakterystyczne dla elektrycznych i elektronicznych układów sterowania, dla układów ze sprzężeniem zwrotnym i dla układów złożonych. Macierz E nie musi mieć struktury zero-jedynkowej związanej z modelami różniczkowo-algebraicznymi. Osobliwość macierzy E może oznaczać, że model układu przybiera postać, która nie jest rozwikływalna względem pochodnych. Model taki nazywany jest też uwikłanym modelem procesu sterowania.

Niech będzie dany obwód elektryczny ze źródłem napięcia $e(t)$, rezystancją R , kondensatorami C_1 i C_2 oraz z indukcyjnością L . Składa się on z dwóch szeregowo połączonych podobwodów RLC_1 oraz C_1eC_2 . Zmiennymi stanu uogólnionego są napięcia $U_1(t)$ i $U_2(t)$ na kondensatorach oraz natężenie prądu $I(t)$ w indukcyjności. Sterowaniem jest napięcie źródłowe $e(t)$. Wyjściem jest napięcie $U_2(t)$ na kondensatorze C_2 .

obwód elektryczny RLC_1eC_2



Na podstawie praw Kirchhoffa zapisujemy równania dla podobwodów

$$RI(t) + L\dot{I}(t) + U_1(t) = 0,$$

$$\dot{U}_1(t) + e(t) - U_2(t) = 0,$$

$$C_1\dot{U}_1(t) + C_2U_2(t) = I(t).$$

Równania te zapisujemy w postaci równoważnej

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & L \\ C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1(t) \\ \dot{U}_2(t) \\ \dot{I}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ I(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(t)$$

Macierz pojawiająca się przy wektorze stanu uogólnionego jest osobliwa, lecz nie ma struktury zero-jedynkowej charakterystycznej dla układów różniczkowo-algebraicznych. Odzwierciedla ona uwikłane równania zmiennych stanu uogólnionego w rozpatrywanym obwodzie elektrycznym.

Oznaczamy zmienne stanu uogólnionego jako

$$x_1(t) = U_1(t), \quad x_2(t) = U_2(t), \quad x_3(t) = I(t),$$

wektor stanu uogólnionego jako

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

sterowanie jako $u(t) = e(t)$, a macierze uogólnionego równania stanu jako

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L \\ C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapisujemy model rozpatrywanego układu w postaci liniowego singularnego równania stanu

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

w którym $\det E = 0$.

Innym źródłem układów singularnych są układy z uogólnionym sprzężeniem zwrotnym. W przypadku podstawowym równania

układu ze sprzężeniem zwrotnym mają postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad u(t) = Ky(t),$$

co prowadzi do równania zamkniętego układu sterowania

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t).$$

Sterowanie jest całkowicie eliminowane przez sprzężenie zwrotne. Jeśli natomiast wprowadzane jest nowe sterowanie zewnętrzne $v(t)$, a sprzężenie zwrotne zależy nie tylko od wyjścia obiektu lecz także od jego pochodnej przyspieszającej działanie układu, to równania układu przybierają postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad u(t) = v(t) - K_1y(t) - K_2\dot{y}(t).$$

Prowadzi to do równania zamkniętego układu sterowania

$$(I + BK_2C)\dot{x}(t) = (A - BK_1C)x(t)$$

lub

$$E\dot{x}(t) = (A - BK_1C)x(t), \quad E \doteq I + BK_2C.$$

Jeżeli

$$\det E = \det(I + BK_2C) = 0,$$

to układ zamknięty staje się singularnym układem sterowania.

Rozważane są również singularne układy sterowania z czasem dyskretnym. Mogą one być bezpośrednim wynikiem modelowania układu funkcjonującego z pewnym taktem zmienności (okresem zmienności) lub mogą być wynikiem dyskretyzacji układu singularnego z czasem ciągłym.

Linijowe singularne układy sterowania modelowane są za pomocą równań

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$$

Przykładem singularnego modelu procesu sterowania w dziedzinie ekonomii jest model Leontiefa N -sektorowego procesu produkcyjnego spełniającego równanie dynamiki

$$x(k) = Fx(k) + E(x(k+1) - x(k)) + u(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

gdzie wektor

$$x(k) = (x_1^T(k), x_2^T(k), \dots, x_N^T(k))^T$$

opisuje poziomy produkcji w poszczególnych sektorach w okresie k -tym (miesiąc, kwartał, rok) w jednostkach monetarnych, macierz F opisuje nakłady na bieżącą produkcję, macierz E opisuje nakłady na rozwój produkcji w poszczególnych sektorach, a wektor

$$u(k) = (u_1^T(k), u_2^T(k), \dots, u_N^T(k))^T$$

oznacza zewnętrzne zapotrzebowanie. Uzyskujemy stąd po prostych przekształceniach równanie singularnego procesu sterowania

$$Ex(k+1) = (I + E - F)x(k) - u(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

gdyż macierz międzysektorowych przepływów kapitałowych E jest w wielu przypadkach osobliwa $\det E = 0$ (macierz E ma z reguły wiele elementów zerowych ponieważ kapitał rozwoju produkcji pochodzi zwykle tylko z niektórych sektorów).

Bardzo ogólny opis układu sterowania w nieliniowej postaci uwikłanej względem pochodnych określany jest mianem równania deskryptorowego

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0,$$

a uogólniony stan układu nazywany jest deskryptorem układu.