

Wprowadzenie do metod sterowania optymalnego

Pojęcie **procesu sterowania** obejmuje zestaw trajektorii stanu i sterowania $(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, gdzie \mathcal{X} jest przestrzenią trajektorii stanu, a \mathcal{U} jest przestrzenią sterowania. Optymalizacja układów sterowania oznacza poszukiwanie takiego sposobu prowadzenia procesu sterowania, który zapewnia ekstremum **wskaźnika jakości procesu** (wydajność procesu, koszt prowadzenia procesu, zysk z prowadzenia procesu) i jest dopuszczalny tj. spełnia ograniczenia odzwierciedlające warunki prowadzenia procesu (ograniczone zużycie surowców i energii, ograniczenia wartości chwilowych zmiennych procesowych). Dopuszczalny proces sterowania ekstremalizujący wskaźnik jakości nazywa się **optymalnym procesem sterowania**, a związane z nim sterowanie nazywa się **sterowaniem optymalnym**.

Różne potrzeby praktyczne prowadzą do wyróżnienia szczególnych zadań sterowania optymalnego np. zadania optymalnego sterowania docelowego, zadania optymalnego sterowania okresowego, czy też zadania optymalnego sterowania stochastycznego.

Niech $|u(t)| \doteq \sqrt{|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2 + \dots + |u_m(t)|^2}$ oznacza normę euklidesową sterowania chwilowego. W zależności od rodzaju zadania sterowania optymalnego przestrzeń sterowania określana jest

- jako unormowany zbiór funkcji ciągłych

$$\mathcal{U} \doteq C([t_0, t_1]; R^m), \|u\| \doteq \max_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji przedziałami ciągłych

$$\mathcal{U} \doteq PC([t_0, t_1]; R^m), \|u\| \doteq \sup_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji przedziałami stałych

$$\mathcal{U} \doteq PS([t_0, t_1]; R^m), \|u\| \doteq \max_{k_0 \leq k \leq k_1} |u_k|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji istotnie ograniczonych

$$\mathcal{U} \doteq L^\infty([t_0, t_1]; R^m), \|u\| \doteq \operatorname{esssup}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem

$$\mathcal{U} \doteq L^2([t_0, t_1]; R^m), \|u\| \doteq \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|^2 dt};$$

- jako unormowany zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem w obszarze wielowymiarowym $\Omega \doteq [t_0, t_1] \times [0, 1]$

$$\mathcal{U} \doteq L^2(\Omega; R^m), \|u\| \doteq \sqrt{\int_{\Omega} |u(t, z)|^2 dz dt}.$$

Na podstawie wyboru przestrzeni sterowania określana jest przestrzeń trajektorii stanu

- jako unormowany zbiór funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły

$$\mathcal{X} \doteq C_1([t_0, t_1], R^n), \|x\| \doteq \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| + \max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji przedziałami różniczkowalnych w sposób ciągły

$$\mathcal{X} \doteq PC_1([t_0, t_1], R^n), \|x\| \doteq \sup_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| + \sup_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji o pochodnej istotnie ograniczonej

$$\mathcal{U} \doteq W_1^\infty([t_0, t_1]; R^m), \|u\| \doteq \text{esssup}_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| + \text{esssup}_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|;$$

- jako unormowany zbiór funkcji o pochodnej całkowalnej z kwadratem

$$\mathcal{X} \doteq W_1^2([t_0, t_1], R^n), \|x\| \doteq \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} (|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2) dt};$$

- jako unormowany zbiór funkcji o pochodnej całkowalnej z kwadratem w obszarze $\Omega \doteq [t_0, t_1] \times [0, 1]$

$$\mathcal{X} \doteq W_1^2(\Omega, R^n), \|x\| \doteq \sqrt{\int_{\Omega} (|x(t, z)|^2 + |\dot{x}(t, z)|^2) dz dt}.$$

Ważną klasą zadań sterowania optymalnego są zadania optymalnego sterowania docelowego formułowane w odniesieniu do procesów mechanicznych, elektromechanicznych, metalurgicznych, chemicznych, biotechnologicznych i wielu innych.

Podstawowe zadanie optymalnego sterowania docelowego polega na minimalizacji całkowitego wskaźnika jakości

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t) dt$$

z uwzględnieniem równania stanu procesu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

warunków dwugranicznych

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $x_0, x_1 \in R^n$, $U \subset R^m$, zaś

$$u \in PC([t_0, t_1]; R^m), \quad x \in PC_1([t_0, t_1]; R^n)$$

lub

$$u \in C([t_0, t_1]; R^m), \quad x \in C_1([t_0, t_1]; R^n).$$

Przykład. Minimalnoenergetyczne nagrzewanie zbiornika z cieczą: zminimalizować straty energetyczne

$$G(x, u) = \int_0^1 u^2(t) dt$$

procesu nagrzewania opisywanego równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t), \quad t \in [0, 1]$$

z warunkami dwugranicznymi

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1,$$

gdzie $x(t)$ jest temperaturą cieczy w zbiorniku w chwili t , x_0 jest jego zadana temperatura początkową, x_1 jest jego zadana temperatura końcową, $u(t)$ jest natężeniem prądu obwodu grzejnego, a jest współczynnikiem stygnięcia cieczy, zaś b jest współczynnikiem nagrzewania cieczy.

Przykład. Minimalnoenergetyczne sterowanie tarczą obrotową: zminimalizować straty energetyczne

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt$$

procesu przestawiania tarczy obrotowej opisywanej równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = bu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

z warunkami dwugranicznymi

$$x_i(t_0) = x_i(0), \quad x_i(t_1) = x_i(1) \quad (i = 1, 2),$$

gdzie $x_1(t)$ oznacza położenie kątowne tarczy, $x_2(t)$ oznacza prędkość kątową tarczy, zaś $u(t)$ jest napięciem obwodu sterującego silnika.

W zadaniach tych pominięto ograniczenia chwilowe sterowania zakładając, że postać wskaźnika jakości automatycznie ograniczy chwilową wartość sterowania.

Przykład. Minimalnoczasowa stabilizacja oscylatora: sprowadzić oscylator do położenia równowagi w minimalnym czasie

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

z uwzględnieniem równań stanu oscylatora

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -ax_1(t) + bu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

warunków dwugranicznych

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad x_i(t_1) = x_{i1}, \quad i = 1, 2,$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $x_1(t)$ jest położeniem oscylatora w chwili t , $x_2(t)$ jest prędkością oscylatora, $u(t)$ jest jego siłą stabilizującą, a jest współczynnikiem amortyzatora sprężynowego, zaś b jest współczynnikiem oddziaływania siły stabilizującej.

Przykład. Minimalnoczasowa stabilizacja oscylatora z tłumieniem własnym: sprowadzić oscylator do położenia równowagi w minimalnym czasie

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

z uwzględnieniem równań stanu oscylatora

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) + bu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

warunków dwugranicznych

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad x_i(t_1) = x_{i1}, \quad i = 1, 2,$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $x_1(t)$ jest położeniem oscylatora w chwili t , $x_2(t)$ jest prędkością oscylatora, $u(t)$ jest jego siłą stabilizującą, a_1 jest współczynnikiem amortyzatora sprężynowego, a_2 jest współczynnikiem tłumika, zaś b jest współczynnikiem oddziaływania siły stabilizującej.

Do rozwiązywania zadań optymalnego sterowania docelowego zastosować można klasyczne metody rachunku wariacyjnego, metody analizy funkcjonalnej oraz zaawansowane metody nieliniowego programowania.

**Sprowadzanie zadań sterowania optymalnego
do zadań wariacyjnych
dla przypadku jednowymiarowego.**

Rozważymy w pierwszej kolejności przypadek jednowymiarowy pojedynczej krzywej ($n = 1, m = 1$). Założymy, że równanie stanu pozwala jednoznacznie określić sterowanie $u(t)$ w funkcji stanu $x(t)$, pochodnej stanu $\dot{x}(t)$ oraz czasu t tj.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \Rightarrow u(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t).$$

Podstawiając uzyskane wyrażenie do wskaźnika jakości sprowadzamy problem optymalnego sterowania docelowego do zadania rachunku wariacyjnego: zminimalizować funkcjonal zależny od krzywej x , jej pochodnej \dot{x} i czasu t

$$\tilde{G}(x) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{g}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

z więzami ustalającymi położenie początkowe i końcowe krzywej

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Zadanie wariacyjne polega więc na wyborze krzywej x łączącej punkty (t_0, x_0) oraz (t_1, x_1) i minimalizującej funkcjonal $\tilde{G}(x)$.

Aby określić warunki konieczne optymalności krzywej w zadaniu wariacyjnym zakładamy, że krzywa jest elementem przestrzeni funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły tj.

$$x \in C_1([t_0, t_1]; R^n), \quad \|x\| \doteq \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| + \max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t)|$$

Definicja: Funkcjonał $\tilde{G}(x)$ osiąga na krzywej \hat{x} lokalne słabe ekstremum, jeżeli istnieje takie $\epsilon > 0$, że

$$(\|x - \hat{x}\| \leq \epsilon) \Rightarrow (\tilde{G}(x) \geq \tilde{G}(\hat{x}))$$

tj. dla wszystkich krzywych z C_1 -otoczenia krzywej \hat{x} wartości funkcjonału $\tilde{G}(x)$ nie są mniejsze od $\tilde{G}(\hat{x})$.

Mówimy w tym przypadku o słabym ekstremum, gdyż rozwiązanie ekstremalne porównujemy z sąsiednimi krzywymi różniczkowalnymi w sposób ciągły (czyli z krzywymi z C_1 -otoczenia) w odróżnieniu od porównania z sąsiednimi krzywymi ciągłymi (czyli z krzywymi z C -otoczenia).

Niech $\hat{x} + \alpha\delta x \in C_1([t_0, t_1]; R^n)$ będzie zaburzeniem krzywej ekstremalnej \hat{x} spełniającym równania więzów (warunki graniczne) $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_1) = 0$, przy czym $\alpha \in R$ jest parametrem rzeczywistym. Funkcjonał $\tilde{G}(x)$ traktowany jako funkcja parametru α przybierze postać

$$\tilde{G}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{g}(\hat{x}(t) + \alpha\delta x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \alpha\delta\dot{x}(t), t) dt.$$

Ponieważ funkcja \tilde{G} z założenia osiąga dla $\alpha = 0$ ekstremum, to

$$\left. \frac{d\tilde{G}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Zakładając, że funkcja \tilde{g} ma ciągłe pochodne cząstkowe \tilde{g}_x i $\tilde{g}_{\dot{x}}$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}(\alpha)}{d\alpha} &= \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{g}_x(\hat{x} + \alpha\delta x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \alpha\delta\dot{x}(t), t)\delta x(t) + \\ &\quad \tilde{g}_{\dot{x}}(\hat{x}(t) + \alpha\delta x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \alpha\delta\dot{x}(t), t)\delta\dot{x}(t)) dt \end{aligned}$$

oraz

$$\left. \frac{d\tilde{G}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{g}_x(t)\delta x(t) + \hat{g}_{\dot{x}}(t)\delta\dot{x}(t)) dt,$$

gdzie

$$\hat{g}_x(t) \doteq \tilde{g}_x(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), t), \quad \hat{g}_{\dot{x}}(t) \doteq \tilde{g}_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), t).$$

Zastosowanie wzoru na całkowanie przez części i uwzględnienie więzów krzywej prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \hat{g}_{\dot{x}}(t)\delta\dot{x}(t) dt &= \hat{g}_{\dot{x}}(t)\delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \hat{g}_{\dot{x}}(t)\delta x(t) dt \\ &= \hat{g}_{\dot{x}}(t_1)\delta x(t_1) - \hat{g}_{\dot{x}}(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \hat{g}_{\dot{x}}(t)\delta x(t) dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \hat{g}_{\dot{x}}(t)\delta x(t) dt. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\frac{d\tilde{G}(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{g}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_{\dot{x}}(t))\delta x(t)dt = 0.$$

Aby ostatnie wyrażenie było równe zero dla dowolnych wariacji $\delta x(t)$ krzywej $\hat{x}(t)$ wyrażenie w nawiasie musi być równe zero tj. spełnione musi być równanie Eulera-Lagrange'a

$$\hat{g}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_{\dot{x}}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Twierdzenie: Warunkiem koniecznym słabego lokalnego ekstremum funkcjonału $\tilde{G}(x)$ na zbiorze krzywych $x \in C_1$ z więzami $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ jest spełnienie **równania Eulera-Lagrange'a** na krzywej ekstremalnej \hat{x} .

Krzywe spełniające równanie Eulera-Lagrange'a nazywamy ekstremalami. Aby stwierdzić czy dana ekstremala stanowi minimum funkcjonału (a nie maksimum lub punkt przegięcia) stosujemy warunki optymalności wyższych rzędów. W szczególności warunki optymalności drugiego rzędu uzyskujemy obliczając drugą pochodną

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\tilde{G}(\alpha)}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\hat{g}_{xx}(t)\delta x^2(t) + 2\hat{g}_{x\dot{x}}(t)\delta x(t)\delta\dot{x}(t) + \hat{g}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\delta\dot{x}^2(t))dt. \end{aligned}$$

Ponieważ zawsze można dobrać wariację $\delta x(t)$ krzywej $\hat{x}(t)$ małą co do modułu lecz z dowolnie dużą pochodną, więc o znaku drugiej pochodnej decyduje wyrażenie $\hat{g}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$. Wynika stąd, że warunkiem koniecznym drugiego rzędu osiągnięcia minimum przez ekstremalę \hat{x} jest nierówność Legendre'a

$$\hat{g}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Warunkiem dostatecznym drugiego rzędu osiągnięcia minimum przez ekstremalę \hat{x} jest ostra nierówność Legendre'a

$$\hat{g}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

pod warunkiem, że ekstremala nie posiada tzw punktów sprzężonych.

Dla zadania z przykładu 1 z parametrami $a = 2$, $b = 1$ i więzami $x(0) = 1$, $x(1) = 2$ uzyskujemy

$$u(t) = \dot{x}(t) + 2x(t)$$

i sprowadzamy zadanie optymalnego sterowania docelowego do zadania wariacyjnego postaci: zminimalizować funkcjonal

$$\tilde{G}(x) = \int_0^1 (\dot{x}(t) + 2x(t))^2 dt$$

uwzględniając więzy krzywej

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

W tym przypadku $\tilde{g}(x(t), \dot{x}(t), t) = (\dot{x}(t) + 2x(t))^2$ i równanie Eulera-Lagrange'a przybiera postać

$$\begin{aligned} & \hat{g}_x(t) - \frac{d}{dt} \hat{g}_{\dot{x}}(t) \\ &= 4(\dot{x} + 2x(t)) - \frac{d}{dt} 2(\dot{x}(t) + 2x(t)) \\ &= 4\dot{x}(t) + 8x(t) - 2\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) = -2\ddot{x}(t) + 8x(t) = 0 \end{aligned}$$

czyli

$$\ddot{x}(t) - 4x(t) = 0.$$

Tak więc równanie Eulera-Lagrange'a ma dla badanego przykładu postać liniowego stacjonarnego równania różniczkowego, którego rozwiązanie określamy wyznaczając pierwiastki równania charakterystycznego

$$\begin{aligned} r^2 - 4 = 0 &\Rightarrow r_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow \hat{x}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \\ \Rightarrow \hat{u}(t) &= 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} + 2c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-2t} = 4c_1 e^{2t}. \end{aligned}$$

Sterowanie optymalne jest więc dla rozważanego procesu nagrzewania funkcją eksponencjalną. Stałe c_i określamy z warunków granicznych uzyskując ostatecznie

$$\hat{u}(t) = \frac{8e^2 - 4}{e^4 - 1} e^{2t}.$$

Sprawdzamy warunek optymalności drugiego rzędu

$$\hat{g}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} 2(\dot{x}(t) + 2x(t)) = 2 > 0.$$

Wyznaczone sterowanie jest więc lokalnym minimum.

Sprowadzanie zadań sterowania optymalnego do zadań wariacyjnych dla przypadku wielowymiarowego.

Uzyskane warunki optymalności uogólniamy bezpośrednio na przypadek zadania wielowymiarowego $n > 1$, $m > 1$. Zakładamy, że wektorowe sterowanie $u(t) \in R^m$ można jednoznacznie określić z równań stanu w funkcji stanu $x(t)$, jego pochodnej $\dot{x}(t)$ i czasu t . Przechodzimy następnie do wielowymiarowego zadania wariacyjnego: zminimalizować funkcjonal zależny od wielowymiarowej krzywej x

$$\tilde{G}(x) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{g}(x(t), \dot{x}(t), t) dt,$$

z więzami

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

gdzie $x(t) \in R^n$, $x_0, x_1 \in R^n$.

W tym przypadku badamy wariacje wektorowej trajektorii stanu

$$\hat{x}_i(t) + \alpha_i \delta x_i(t), \quad \delta x_i(t_0) = 0, \quad \delta x_i(t_1) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $\alpha_i \in R$ jest parametrem wariacji i -tej współrzędnej stanu.

Wskaźnik jakości zadania wariacyjnego przybierze postać funkcji n skalar-nych argumentów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tj.

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{G}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \doteq & \int_{t_0}^{t_1} \tilde{g}(\hat{x}_1(t) + \alpha_1 \delta x_1(t), \dot{\hat{x}}_1(t) + \alpha_1 \delta \dot{x}_1(t), \dots, \\ & \hat{x}_n(t) + \alpha_n \delta x_n(t), \dot{\hat{x}}_n(t) + \alpha_n \delta \dot{x}_n(t), t) dt. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $\tilde{\tilde{G}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ osiąga z założenia minimum, więc muszą być spełnione warunki konieczne optymalności pierwszego rzędu funkcji wielu zmiennych tj.

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{G}}}{\partial \alpha_i}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Uzyskujemy stąd po zastosowaniu wzoru na całkowanie przez części

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tilde{G}}}{\partial \alpha_i}(0) &= \int_{t_0}^{t_1} (\hat{g}_{x_i}(t) \delta x_i(t) + \hat{g}_{\dot{x}_i}(t) \delta \dot{x}_i(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{g}_{x_i}(t) - \frac{d}{dt} \hat{g}_{\dot{x}_i}(t) \right) \delta x_i(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Warunek konieczny optymalności pierwszego rzędu krzywej wielowymiarowego zadania wariacyjnego można więc zapisać w postaci **układu równań Eulera-Lagrange'a**

$$\hat{g}_{x_i}(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_{\dot{x}_i}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \dots, n.$$

Celem określenia czy krzywa ekstremalna wyznaczona na podstawie warunków optymalności rzędu pierwszego stanowi minimum funkcjonału $\tilde{G}(x)$ (a nie jego maksimum lub punkt przegięcia) stosujemy warunki optymalności drugiego rzędu tj. badamy macierz pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcjonału $\tilde{G}(x)$. Pochodne te przybierają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{G}(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=0} &= \int_{t_0}^{t_1} (\hat{g}_{x_i x_j}(t) \delta x_i(t) \delta x_j(t) \\ &+ 2\hat{g}_{x_i \dot{x}_j}(t) \delta x_i(t) \delta \dot{x}_j(t) + \hat{g}_{\dot{x}_i \dot{x}_j}(t) \delta \dot{x}_i(t) \delta \dot{x}_j(t)) dt. \end{aligned}$$

Warunki optymalności drugiego rzędu sprowadzają się do badania dodatniej półokreśloności lub dodatniej określoności macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{G}(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=0} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Stosując analogiczne rozumowanie jak w przypadku warunków drugiego rzędu dla krzywej jednowymiarowej wnioskujemy, że o dodatniej (pół)określoności analizowanej macierzy decydować będzie macierz drugich pochodnych cząstkowych postaci

$$\left(\hat{g}_{\dot{x}_i \dot{x}_j}(t) \right)_{i,j=1,\dots,n} \geq 0 \quad (> 0).$$

Przykład. Minimalnoenergetyczne nagrzewanie układu dwóch zbiorników z cieczą: zminimalizować sumaryczne straty energetyczne

$$G(x, u) = \int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt$$

procesu nagrzewania opisywanego za pomocą równań stanu

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + u_i(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2$$

z warunkami granicznymi

$$x_i(0) = 1, \quad x_i(1) = 2, \quad i = 1, 2.$$

Sprowadzamy zadanie do postaci wariacyjnej

$$u_i(t) = x_i(t) + a_i x_i(t), \quad \tilde{G}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i(t) + a_i x_i(t))^2 dt,$$

a więc

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i(t) + a_i x_i(t))^2, \quad \tilde{g}_{x_i} = 2a_i(\dot{x}_i(t) + a_i x_i(t))$$

oraz

$$\tilde{g}_{\dot{x}_i} = 2(\dot{x}_i(t) + a_i x_i(t)).$$

Zestawiamy układ równań Eulera-Lagrange'a

$$2a_i(\dot{x}_i(t) + a_i x_i(t)) - \frac{d}{dt} 2(\dot{x}_i(t) + a_i x_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Stąd

$$a_i \dot{x}_i(t) + a_i^2 x_i(t) - \ddot{x}_i(t) - a_i \dot{x}_i(t) = 0$$

i

$$\ddot{x}_i(t) = a_i^2 x_i(t), \quad r_i^2 = a_i^2, \quad r_{i,1,2} = \pm a_i.$$

Optymalna trajektoria stanu ma więc postać

$$\hat{x}_i(t) = c_{i1} e^{a_i t} + c_{i2} e^{-a_i t},$$

zaś sterowanie optymalne jest określone jak następuje

$$\hat{u}_i(t) = 2a_i c_{i1} e^{a_i t}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2,$$

przy czym stałe c_{i1} , c_{i2} określamy z warunków granicznych. Warunki optymalności drugiego rzędu sprowadzają się do badania macierzy

$$\begin{pmatrix} \hat{g}_{\dot{x}_1 \dot{x}_1} & \tilde{g}_{\dot{x}_1 \dot{x}_2} \\ \hat{g}_{\dot{x}_2 \dot{x}_1} & \tilde{g}_{\dot{x}_2 \dot{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wyznaczone rozwiązanie jest rozwiązaniem minimalizującym, ponieważ minory główne tej macierzy są dodatnie.

Sprowadzanie zadań sterowania optymalnego do zadań wariacyjnych z pochodnymi wyższych rzędów.

W niektórych przypadkach z równań stanu

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t), t), \quad i = 1, \dots, n$$

można jednoznacznie wyznaczyć sterowanie w funkcji pewnego podwektora $x(t) \in R^k$ ($k < n$) wektora stanu $x(t) \in R^n$ i jego pochodnych $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ oraz czasu t tj.

$$u(t) = F(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t), t),$$

przy czym warunki graniczne wektora stanu $x(t)$ implikują odpowiednie warunki graniczne podwektora stanu $x(t)$

$$x_i(t_\kappa) = x_{i\kappa} \quad (i = 1, \dots, n; \kappa = 0, 1) \Rightarrow$$

$$x^{(l)}(t_\kappa) = x_\kappa^{(l)} \quad (l = 0, 1, \dots, n-1; \kappa = 0, 1).$$

Rozpatrzmy przypadek $k = 1, n > 1$ i funkcjonal zadania wariacyjnego w postaci

$$\tilde{G}(x) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{g}(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t), t) dt$$

i wariację krzywej z parametrem $\alpha \in R$

$$\hat{x}(t) + \alpha \delta x(t), \quad \delta x^{(l)}(t_\kappa) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, n-1; \kappa = 0, 1).$$

Przechodzimy do α -parametryzacji funkcjonału $\tilde{G}(x)$ tj. do funkcji

$$\tilde{G}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{g}(\hat{x}(t) + \alpha \delta x(t), \dot{\hat{x}}(t) + \alpha \delta \dot{x}(t), \dots, \hat{x}^{(n)}(t) + \alpha \delta x^{(n)}(t), t) dt.$$

Zapisujemy warunek konieczny optymalności rzędu pierwszego funkcji $\tilde{G}(\alpha)$

$$\frac{d\tilde{G}(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

czyli

$$\int_{t_0}^{t_1} (\hat{g}_x(t) \delta x(t) + \hat{g}_{\dot{x}}(t) \delta \dot{x}(t) + \dots + \hat{g}_{x^{(n)}}(t) \delta x^{(n)}(t)) dt = 0.$$

Do wyrażenia typu $\int_{t_0}^{t_1} \hat{g}_{x^{(l)}}(t) \delta x^{(l)}(t) dt$ stosujemy l -krotnie wzór na całkowanie przez części z uwzględnieniem zerowania się wariacji krzywej w więzach, co prowadzi do wyrażenia

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{g}_x(t) - \frac{d}{dt} \hat{g}_{\dot{x}}(t) + \frac{d^2}{dt^2} \hat{g}_{\ddot{x}}(t) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \hat{g}_{x^{(n)}}(t) \right) \delta x(t) dt$$

Uzyskujemy w ten sposób warunek konieczny optymalności pierwszego rzędu dla słabego ekstremum zadania wariacyjnego z pochodnymi wyższych rzędów w postaci **równania Eulera-Poissona**

$$\hat{g}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_{\dot{x}}(t) + \frac{d^2}{dt^2}\hat{g}_{\ddot{x}}(t) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\hat{g}_{x^{(n)}}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Warunki optymalności drugiego rzędu przybierają w tym przypadku postać

$$\hat{g}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \geq 0 \quad (> 0).$$

Przykład. Minimalnoenergetyczne sterowanie tarczą obrotową: zminimalizować straty energetyczne

$$G(x, u) = \int_0^1 u^2(t) dt$$

procesu przestawiania tarczy obrotowej opisywanej równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = bu(t), \quad t \in [0, 1],$$

z warunkami dwugranicznymi

$$x_i(0) = 1, \quad x_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

gdzie $x_1(t)$ oznacza położenie kątowne tarczy, $x_2(t)$ oznacza prędkość kątową tarczy, zaś $u(t)$ jest napięciem obwodu sterującego silnika.

Przeprowadzamy redukcję problemu zadania wariacyjnego z pochodną drugiego rzędu. Wyróżniamy podwektor wektora stanu w postaci $x(t) \doteq x_1(t)$ i z równań stanu uzyskujemy $\ddot{x}(t) = \dot{x}_2(t) = u(t)$. Zadanie wariacyjne przyjmuje postać: zminimalizować funkcjonal określony na krzywej x o postaci

$$\tilde{G}(x) = \int_0^1 \ddot{x}^2(t) dt$$

z uwzględnieniem więzów krzywej

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 0.$$

W tym przypadku $\tilde{g} = \ddot{x}^2$, $\tilde{g}_x = 0$, $\tilde{g}_{\dot{x}} = 0$, $\tilde{g}_{\ddot{x}} = 2\ddot{x}$ i równanie Eulera-Poissona przybiera postać

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{g}_{\ddot{x}} = 0 \Rightarrow 2\frac{d^4}{dt^4}x(t) = 0.$$

Równanie charakterystyczne różniczkowego równania Eulera-Poissona zapisujemy jako $r^4 = 0$. Posiada ono czterokrotny pierwiastek zerowy. Rozwiązanie tego równania jest postaci

$$\hat{x}(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$$

skąd

$$\hat{u}(t) = 6c_3t + 2c_2.$$

Stałe wyznaczamy z więzów krzywej uzyskując $c_2 = -5$, $c_3 = 3$ oraz $\hat{u}(t) = 18t - 10$, $t \in [0, 1]$.

Warunek optymalności drugiego rzędu daje w wyniku

$$\tilde{g}_{\ddot{x}\ddot{x}} = 2 > 0,$$

a więc wyznaczone rozwiązanie jest poszukiwanym minimum.

Mnożniki funkcyjne Lagrange'a i funkcje kary w sterowaniu optymalnym

Sprowadzanie zadań sterowania optymalnego do zadań wariacyjnych metodą funkcji kary i mnożników Lagrange'a - zadania sterowania optymalnego z ograniczeniami chwilowymi sterowania i z uwikłanym sterowaniem w równaniach stanu

Rozważmy zadanie optymalnego sterowania docelowego z uwikłanym sterowaniem w równaniach stanu i z ograniczeniami chwilowymi sterowania: zminimalizować wskaźnik jakości

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t) dt$$

uwzględniając równanie stanu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

warunki graniczne

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

oraz ograniczenia chwilowe sterowania

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Niech chwilowe ograniczenia sterowania będą postaci

$$|u(t)| \leq u^{max}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Wprowadzamy funkcję kary za przekroczenie ograniczeń chwilowych

$$K_j(u_j(t)) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |u_j(t)| \leq u_j^{max} \\ \rho_j |u_j(t) - u_j^{max}|^2 & \text{gdy } |u_j(t)| > u_j^{max} \end{cases}$$

gdzie $\rho_j > 0$ jest współczynnikiem kary. Wraz ze wzrostem współczynnika kary $\rho_j \rightarrow +\infty$ funkcja kary staje się coraz bardziej stroma i tym samym coraz dokładniejsza.

Stosując metodę funkcyjnych mnożników Lagrange'a $\lambda(t)$ dla równań stanu i funkcję kary $K(u(t)) \doteq \sum_{j=1}^m K_j(u_j(t))$ dla ograniczeń chwilowych sterowania włączamy te ograniczenia do wskaźnika jakości modyfikując go do postaci

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x, \lambda, u) &\doteq \int_{t_0}^{t_1} (g(x(t), u(t), t) \\ &+ \lambda^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) + K(u(t))) dt \end{aligned}$$

minimalizowanego przy jedynych pozostałych ograniczeniach jakimi są warunki graniczne

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Tak więc rozszerzamy zakres zmiennych do postaci wektora zmiennych funkcyjnych (x, λ, u) traktując je jako równoprawne zmienne optymalizacyjne z przestrzeni C_1 . Warunki konieczne optymalności określimy definiując funkcję \tilde{g} jak następuje

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), \dot{\lambda}(t), u(t), \dot{u}(t), t) = \\ g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) + K(u(t)) \end{aligned}$$

i zapisujemy warunki konieczne optymalności w postaci następującego układu równań Eulera-Lagrange'a

$$\hat{g}_x(t) - \frac{d}{dt} \hat{g}_x(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (*)$$

$$\hat{g}_\lambda(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_\lambda(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (**)$$

$$\hat{g}_u(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_u(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (***)$$

Jest to układ $2n + m$ równań różniczkowych dla $2n + m$ zmiennych funkcyjnych. Mnożnik funkcyjny $\lambda(t)$ nazywany jest także zmienną sprzężoną lub zmienną kosztu (wektorem kosztu). Równanie (*) nazywane jest równaniem sprzężonym lub równaniem kosztu optymalnego, równanie (**) jest równaniem stanu optymalnego, zaś (***) jest równaniem sterowania optymalnego. Układ tych równań pozwala dla niektórych klas problemów sterowania optymalnego efektywnie sparametryzować sterowanie optymalne, co ułatwia jego dookreślenie za pomocą prostego dodatkowego algorytmu obliczeniowego.

Minimalnoczasowe sterowanie docelowe dla układów liniowych

Zadanie polega na minimalizacji czasu realizacji procesu docelowego

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

z uwzględnieniem liniowego stacjonarnego równania stanu układu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

warunków dwugranicznych

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$|u(t)| \leq u^{max}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Rozszerzamy zestaw zmiennych i zapisujemy zmodyfikowany wskaźnik jakości

$$\tilde{G}(x, \lambda, u) = \int_{t_0}^{t_1} (1 + \lambda^T(t)(\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t)) + K(u(t))) dt.$$

Mamy więc

$$\tilde{g}_x(t) = -\lambda^T(t)A, \quad \tilde{g}_\dot{x}(t) = \lambda^T(t),$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_\lambda(t) &= (\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t))^T, \quad \tilde{g}_\lambda(t) = 0, \\ \tilde{g}_u(t) &= \lambda^T(t)B + K_u(u(t)), \quad \tilde{g}_u(t) = 0.\end{aligned}$$

Układ równań Eulera-Lagrange'a przyjmie postać

- równanie kosztu optymalnego

$$-\lambda^T(t)A - \dot{\lambda}^T(t) = 0,$$

- równanie stanu optymalnego

$$\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t) = 0,$$

- równanie sterowania optymalnego

$$-\lambda^T(t)B + K_u(u(t)) = 0.$$

Przykład. Minimalnoczasowe sprowadzanie oscylatora idealnego do położenia równowagi, jeśli jest on opisywany równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad t \in [0, t_1],$$

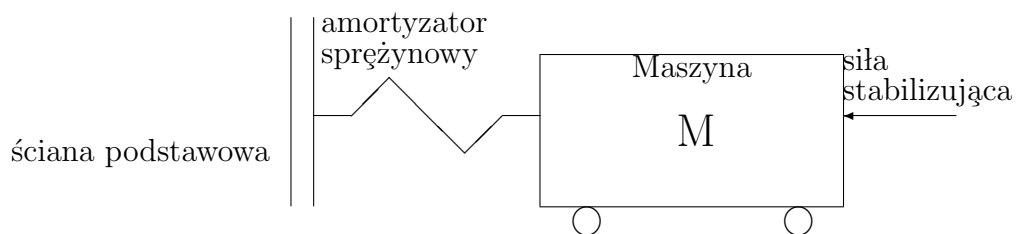
z warunkami granicznymi

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2$$

i z ograniczeniami chwilowymi sterowania

$$|u(t)| \leq 1.$$

Schemat rozważanego układu przedstawiony jest na rysunku



W tym przypadku

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oznacza to, że zmienne kostanu spełniają równania

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= \lambda_2(t), \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t), \\ \Rightarrow \ddot{\lambda}_1(t) &= -\lambda_1(t), \quad r^2 = -1, \quad r_{1,2} = \pm j, \\ \lambda_1(t) &= c_1 \sin(t + c_2), \quad \lambda_2(t) = c_1 \cos(t + c_2), \\ K_u(u(t)) &= \lambda_2(t).\end{aligned}$$

Ostatnie równanie jest równaniem sterowania minimalnoczasowego oscylatora idealnego. Implikuje ono, że sterowanie to przyjmuje wyłącznie wartości $\hat{u}(t) = \pm 1$. Podstawienie tego sterowania do równań stanu pozwala określić kształt trajektorii stanu dla sterowania minimalnoczasowego.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \pm 1 \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -x_1(t) \pm 1 \\ \Rightarrow x_1(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \pm 1, \quad x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \\ x_{10} &= c_1 \pm 1; \quad x_{20} = c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1(t) &= (x_{10} \mp 1) \cos t + x_{20} \sin t \pm 1; \\ x_2(t) &= -(x_{10} \mp 1) \sin t + x_{20} \cos t.\end{aligned}$$

Na tej podstawie ustalamy związek między zmiennymi $x_1(t)$ i $x_2(t)$ podnosząc do kwadratu ostatnie zależności

$$\begin{aligned}(x_1(t) \mp 1)^2 &= (x_{10} \mp 1)^2 \cos^2 t + x_{20}^2 \sin^2 t \\ &\quad + 2(x_{10} \mp 1) \cos t \cdot x_{20} \sin t, \\ x_2^2(t) &= (x_{10} \mp 1)^2 \sin^2 t + x_{20}^2 \cos^2 t \\ &\quad - 2(x_{10} \mp 1) \cos t \cdot x_{20} \sin t\end{aligned}$$

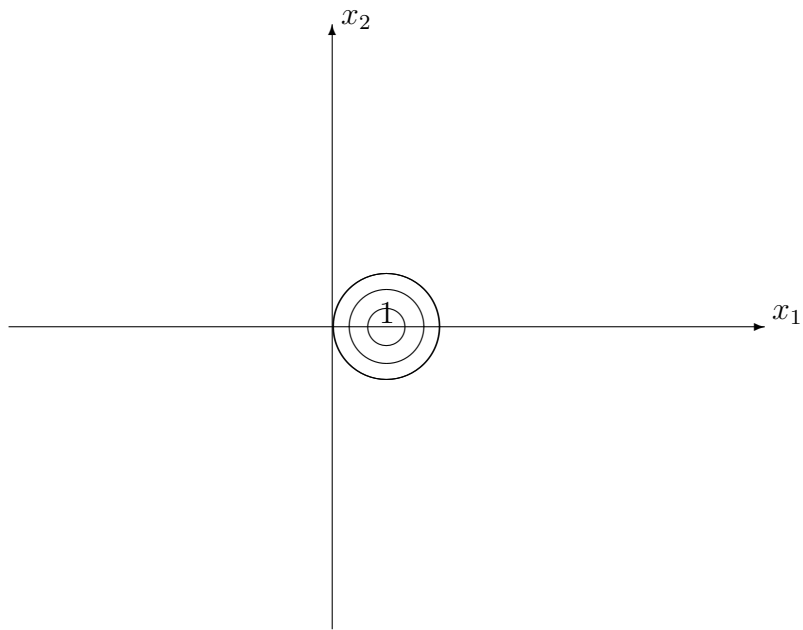
czyli

$$(x_1 \mp 1)^2 + x_2^2 = (x_{10} \mp 1)^2 + x_{20}^2.$$

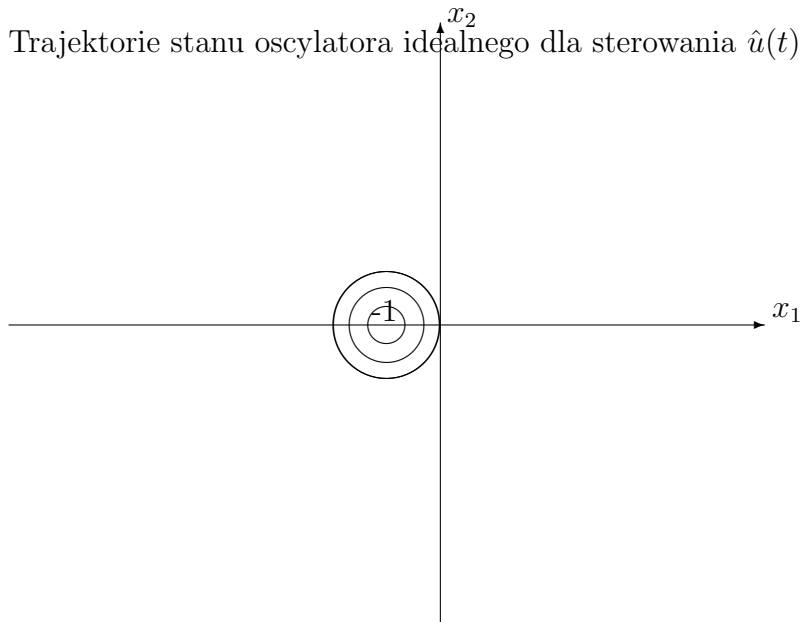
Tak więc trajektorie stanu oscylatora są okręgami o środku $(1, 0)$ dla sterowania $\hat{u}(t) = +1$ i okręgami o środku $(-1, 0)$ dla sterowania $\hat{u}(t) = -1$. Promień okręgu jest równy

$$\rho = \left((x_{10} \mp 1)^2 + x_{20}^2 \right)^{1/2}.$$

Trajektorie stanu oscylatora idealnego dla sterowania $\hat{u}(t) = +1$



Trajektorie stanu oscylatora idealnego dla sterowania $\hat{u}(t) = -1$

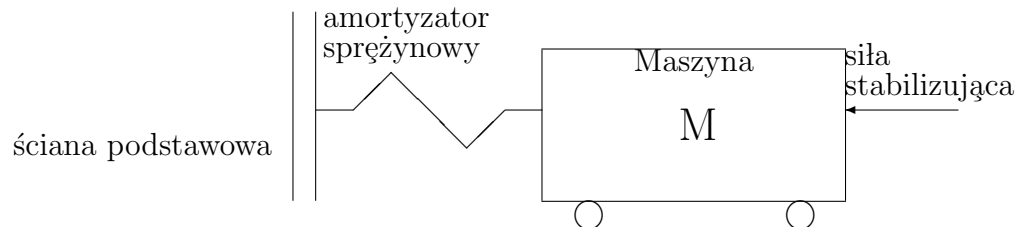


Wnioski z równania sterowania optymalnego:

- Sterowanie minimalnoczasowe przyjmuje wartości $+1$ lub -1 (jest typu bang-bang).
- Czas stałości sterowania minimalnoczasowego na poziomie $+1$ lub -1 nie może być dłuższy niż π jednostek czasu (okres drgań badanego oscylatora wynosi 2π , a czas przebiegu połowy okręgu wynosi π). Tylko pierwszy i ostatni przedział stałości sterowania może być mniejszy od π , a wszystkie pośrednie przedziały (jeśli wszystkich przedziałów stałości sterowania jest więcej niż dwa) muszą być równe π .

Przykład 7. Minimalnoczasowe sprowadzanie oscylatora idealnego do położenia

równowagi z dowolną częstotliwością drgań własnych



Układ o charakterze oscylatora idealnego jest opisywany równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) + u(t), \quad t \in [0, t_1],$$

z warunkami granicznymi

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2$$

i z ograniczeniami chwilowymi sterowania

$$|u(t)| \leq 1,$$

gdzie a_1 jest współczynnikiem amortyzatora sprężynowego.

Dla celów analizy własności matematycznych modelu układu użyteczna jest symetryzacja równań stanu uzyskiwana przez podstawienia $\omega = \sqrt{a_1}$, $x_1(t) := x_1(t)/\omega$.

Równania stanu oscylatora idealnego ze sterowaniem po symetryzacji przybierają postać

$$\dot{x}_1(t) = \omega x_2(t), \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1(t) + u(t), \quad t \in [0, t_1].$$

W tym przypadku macierze stanu, kosztu i sterowania można zapisać następująco:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad -A^T = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Równanie optymalnego kosztu

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda^T(t)$$

implikuje dla zmiennych sprzężonych równania

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega\lambda_2(t), \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\omega\lambda_1(t).$$

Układ ten można zredukować do pojedynczego równania drugiego rzędu

$$\Rightarrow \ddot{\lambda}_1(t) = -\omega^2\lambda_1(t)$$

z równaniem charakterystycznym

$$r^2 = -\omega^2, \quad r_{1,2} = \pm j\omega.$$

Oznacza to, że zmienne sprzężone są w tym przypadku okresowymi funkcjami czasu i w szczególności

$$\lambda_2(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta).$$

Z równania optymalnego sterowania uzyskujemy

$$K_u(u(t)) = \lambda_2(t).$$

Wynika stąd, że przebieg sterowania minimalnoczasowego jest określony zależnością

$$\hat{u}(t) = \text{sign}(\alpha \sin(\omega t + \beta)).$$

Wnioski z równania sterowania minimalnoczasowego:

- Sterowanie minimalnoczasowe oscylatora idealnego przyjmuje wartości $+1$ lub -1 (jest typu bang-bang).
- Czas stałości sterowania minimalnoczasowego na poziomie $+1$ lub -1 nie może być dłuższy niż π/ω jednostek czasu (okres drgań badanego oscylatora wynosi $2\pi/\omega$, a czas przebiegu połowy okręgu wynosi π/ω). Tylko pierwszy i ostatni przedział stałości sterowania może być mniejszy od π/ω , a wszystkie pośrednie przedziały (jeśli wszystkich przedziałów stałości sterowania jest więcej niż dwa) muszą być równe π/ω .
- Liczba przełączeń sterowania minimalnoczasowego może nieograniczenie narastać wraz ze wzrostem częstotliwości sterowania.

Kształt trajektorii stanu oscylatora idealnego ze sterowaniem $\hat{u}(t) = +1$:

$$\dot{x}_1(t) = \omega x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t) + 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 x_1(t) + \omega \\
\Rightarrow x_1(t) &= 1/\omega + c_1 \cos \omega t + (c_2/\omega) \sin \omega t, \\
x_2(t) &= -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \\
\Rightarrow x_{10} &= c_1 + 1/\omega; \quad x_{20} = c_2 \omega \\
\Rightarrow x_1(t) &= 1/\omega + (x_{10} - 1/\omega) \cos \omega t + x_{20} \sin \omega t, \\
x_2(t) &= -(x_{10} - 1/\omega) \sin \omega t + x_{20} \cos \omega t \\
\Rightarrow \omega x_1(t) - 1 &= (\omega x_{10} - 1) \cos \omega t + \omega x_{20} \sin \omega t, \\
\omega x_2(t) &= -(\omega x_1(t) - 1) \sin \omega t + \omega x_{20} \cos \omega t.
\end{aligned}$$

Na tej podstawie ustalamy związek między zmiennymi $x_1(t)$ i $x_2(t)$ podnosząc do kwadratu ostatnie zależności

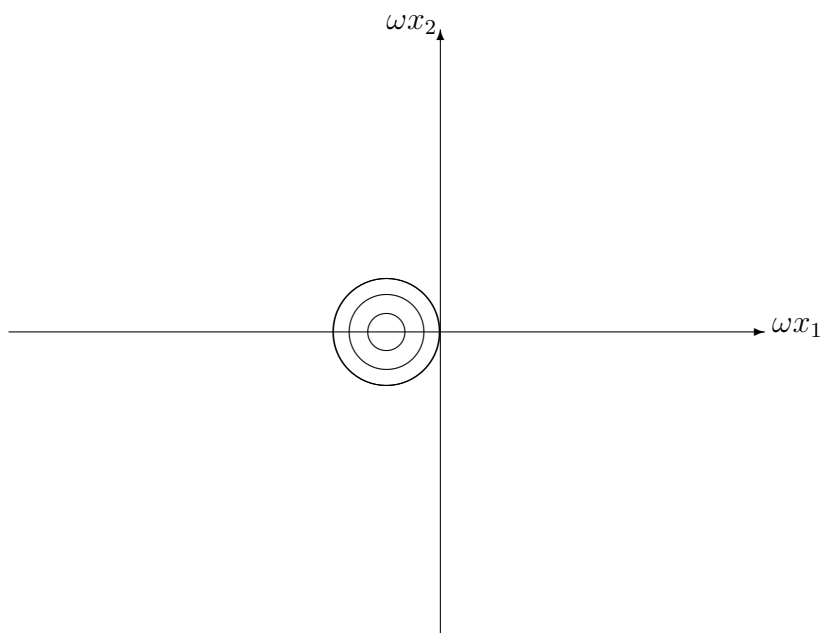
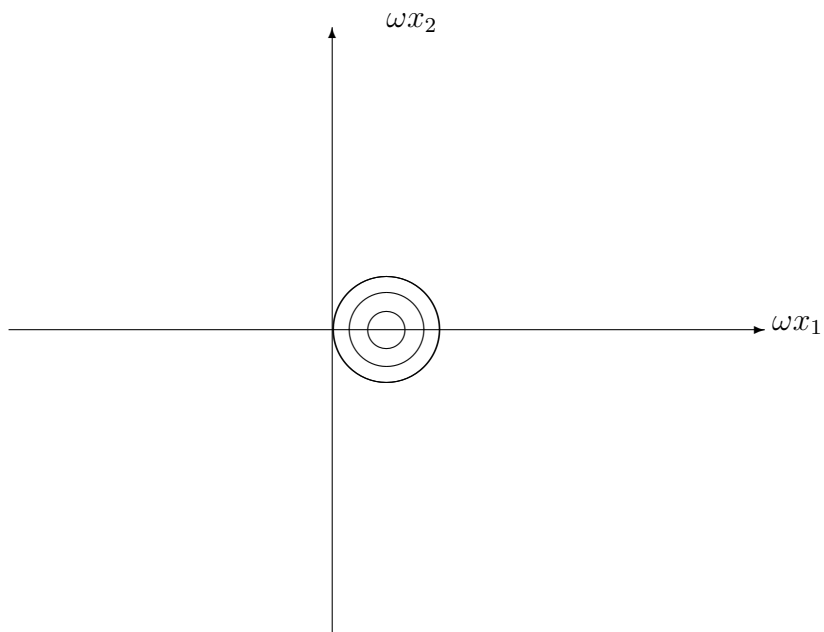
$$(\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = (\omega x_{10} - 1)^2 + (\omega x_{20})^2.$$

Stosując analogiczne przekształcenia uzyskujemy dla sterowania $u = -1$

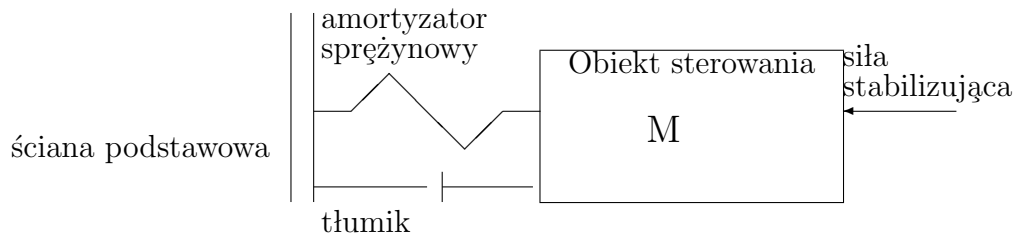
$$(\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = (\omega x_{10} - 1)^2 + (\omega x_{20})^2.$$

Tak więc trajektorie stanu oscylatora idealnego są, we współrzędnych $(\omega x_1, \omega x_2)$, okręgami o środku $(1, 0)$ dla sterowania $\hat{u}(t) = +1$ i okręgami o środku $(-1, 0)$ dla sterowania $\hat{u}(t) = -1$. Promień okręgu jest równy

$$\rho = \sqrt{((\omega x_{10} - 1)^2 + (\omega x_{20})^2)}.$$



Przykład. Minimalnoczasowe sprowadzanie oscylatora z tłumieniem własnym do położenia równowagi.



Układ o charakterze oscylatora z tłumieniem własnym jest opisywany równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2\xi x_2(t) + u(t), \quad t \in [0, t_1],$$

z warunkami granicznymi

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2$$

i z ograniczeniami chwilowymi sterowania

$$|u(t)| \leq 1,$$

gdzie $\xi \in (0, 1)$ jest współczynnikiem tłumienia oscylatora.

Dla celów analizy własności matematycznych modelu układu dokonujemy symetryzacji równań stanu wprowadzając nowe współrzędne stanu za pomocą przekształcenia

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} & 0 \\ -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

czyli

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\xi^2} & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Równania stanu w nowych współrzędnych przybiorą postać

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\xi^2} & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} & 0 \\ -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

czyli

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi & \sqrt{1-\xi^2} \\ -\sqrt{1-\xi^2} & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Zadanie minimalnoczasowego sterowania dla oscylatora z tłumieniem własnym w nowych współrzędnych stanu przybierze postać: zminimalizować wskaźnik jakości

$$G(z, u) = \int_0^{t_1} dt$$

uwzględniając ograniczenia w postaci przekształconych równań stanu

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, t_1], \quad z(0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1$$

oraz w postaci maksymalnej dopuszczalnej amplitudy sterowania

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_1],$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} -\xi & \sqrt{1-\xi^2} \\ -\sqrt{1-\xi^2} & -\xi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Zapisujemy zmodyfikowany funkcjonal Lagrange'a

$$\tilde{G}(z, \lambda, u) = \int_0^{t_1} (1 + \lambda^T(t)(\dot{z}(t) - Az(t) - Bu(t)) + K(u(t))) dt$$

oraz równania Eulera-Lagrange'a

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t), \quad \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad K_u(u(t)) = \lambda^T(t)B,$$

gdzie

$$-A^T = \begin{pmatrix} \xi & \sqrt{1-\xi^2} \\ -\sqrt{1-\xi^2} & \xi \end{pmatrix}$$

Z równania optymalnego sterowania wynika, że

$$\hat{u}(t) = \text{sign}(\lambda_2(t)).$$

W związku z tym analizujemy rozwiązanie równań sprzężonych przyjmujących w zapisie skalarnym postać

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= \xi\lambda_1(t) + \sqrt{1-\xi^2}\lambda_2(t), \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\sqrt{1-\xi^2}\lambda_1(t) + \xi\lambda_2(t).\end{aligned}$$

Wyznaczamy rozwiązanie układu równań sprzężonych jako układu stacjonarnych jednorodnych równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= C_1 e^{\xi t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2), \\ \lambda_2(t) &= C_1 e^{\xi t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2).\end{aligned}$$

Tak więc sterowanie minimalnoczasowe określone jest przez znak funkcji typu $\cos at$ (modulowanej przez eksponentę)

$$\hat{u}(t) = \text{sign}(C_1 e^{\xi t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2)).$$

Wynika stąd, że sterowanie minimalnoczasowe dla oscylatora z tłumieniem własnym przyjmuje wartości $+1$ lub -1 i zachowuje stałą wartość nie dłużej niż $\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ jednostek czasu.

Aby określić krzywą przełączeń sterowania minimalnoczasowego zapisujemy równania stanu dla $u(t) = \pm 1$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -\xi z_1(t) + \sqrt{1-\xi^2} z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= -\xi z_1(t) - \xi z_2(t) \pm 1.\end{aligned}$$

i ich rozwiązanie dla $\hat{u} = +1$

$$\begin{aligned}z_1(t) &= \sqrt{1-\xi^2} + C_1 e^{-\xi t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2), \\ z_2(t) &= \xi - C_1 e^{-\xi t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2)\end{aligned}$$

oraz dla $\hat{u} = -1$

$$z_1(t) = -\sqrt{1-\xi^2} + C_1 e^{-\xi t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2),$$

$$z_2(t) = -\xi - C_1 e^{-\xi t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}t + C_2).$$

Wprowadzając współrzędna biegunowe

$$\rho(t) \doteq C_1 e^{-\xi t}, \quad \varphi(t) \doteq -\sqrt{1-\xi^2}t - C_2$$

uzyskujemy dla $\hat{u}(t) = +1$

$$z_1(t) - \sqrt{1-\xi^2} = \rho(t) \cos \varphi(t),$$

$$z_2(t) - \xi = \rho(t) \sin \varphi(t).$$

Trajektoria stanu opisywana tymi równaniami jest spiralą logarytmiczną o środku $(\sqrt{1-\xi^2}, \xi)$.

Natomiast dla $\hat{u}(t) = -1$ uzyskujemy

$$z_1(t) + \sqrt{1-\xi^2} = \rho(t) \cos \varphi(t),$$

$$z_2(t) + \xi = \rho(t) \sin \varphi(t).$$

Trajektoria stanu opisywana tymi równaniami jest spiralą logarytmiczną o środku $(-\sqrt{1-\xi^2}, -\xi)$.

Półowa zwoju każdej ze wskazanych spirali odpowiada $\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ jednostkom czasu. Pierwsze dwa kawałki krzywej przełączeń określone są spiralami przechodzącymi przez początek układu współrzędnych. Kolejne kawałki krzywej przełączeń określane są przez osiągnięcie tych pierwszych kawałków za pomocą połowy zwoju spirali jako przebiegu trajektorii stanu układu odpowiadającego $\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ jednostkom czasu. Każdemu stanowi początkowemu położonemu nad krzywą przełączeń odpowiada sterowanie optymalne $\hat{u}(t) = -1$, a pod krzywą - sterowanie optymalne $\hat{u}(t) = +1$.