Stabilność nieliniowych układów sterowania.

Bezpośrednia metoda Lapunowa

W teorii stabilności nieliniowych układów sterowania badamy wrażliwość trajektorii stanu na zaburzenia stanu początkowego.

$$(\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\ t \in [t_0, \infty),\ x(t_0) = x_0) \Rightarrow$$

$$(\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\ t \in [t_0, \infty),\ x(t_0) = x_0 + \delta x_0).$$

Niech $\boldsymbol{x}(t)$ będzie wyróżnioną trajektorią stanu związaną z wyróżnionym stanem początkowym $\boldsymbol{x}_0$ i z wyróżnionym sterowaniem $\boldsymbol{u}(t)$. Spełnia ona równanie stanu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t),\ t \in [0, \infty),\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

Jak zmieni się przebieg wyróżnionej trajektorii stanu, jeśli nastąpi zaburzenie wyróżnionego stanu początkowego ?

Analizę warunków stabilności nieliniowych układów sterowania można sprowadzić do badania stabilności tzw. zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania określonego za pomocą przekształcenia

$$(\tilde{x}(t) = x(t) - \boldsymbol{x}(t)) \Rightarrow (x(t) = \tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t)).$$

Równanie stanu względem nowych współrzędnych stanu przybierze postać

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t),$$

czyli

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) - f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t).$$

Definiując prawą stronę przekształconego równania stanu jako

$$\tilde{f}(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) - f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

możemy zapisać to równanie w postaci

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t).$$

Rozwiązanie zerowe $\tilde{x}(t) = 0$ ostatniego równania jest równoważne z wyróżnionym rozwiązaniem $\boldsymbol{x}(t)$ równania pierwotnego. Rozwiązanie to jest punktem równowagi układu przekształconego, gdyż

$$\tilde{f}(0, t) = f(0 + \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) - f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) = 0.$$

Tak więc badanie stabilności dowolnej wyróżnionej trajektorii stanu układu sterowania można sprowadzić do badania zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania.

• **Definicja stabilności asymptotycznej w obszarze:** Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem asymptotycznie stabilnym w obszarze D obejmującym ten punkt, jeżeli zachodzi implikacja $\big(x(t_0) \in D\big) \rightarrow (\lim\limits_{t\to\infty} ||x(t)|| = 0)$, gdzie $||x|| \doteq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$.

• **Definicja globalnej stabilności asymptotycznej:** Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem globalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli $D = R^n$.

• **Definicja lokalnej stabilności asymptotycznej:** Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem lokalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli D jest zbiorem ograniczonym (jeżeli D leży w kuli o promieniu ρ).

Badanie stabilności nieliniowych układów sterowania za pomocą bezpośredniej metody Lapunowa zwanej także **drugą metodą Lapunowa**.

Metoda Lapunowa stosuje pojęcia funkcji dodatnio i ujemnie określonej (półokreślonej).

Funkcja skalarna $V(x, t)$ wektora stanu i czasu nazywa się funkcją dodatnio (ujemnie) określoną w obszarze D zawierającym punkt $x = 0$, jeżeli funkcja ta w każdym punkcie tego obszaru, różnym od punktu $x = 0$, przybiera dla $t \geq t_0$ wartość dodatnią (ujemną) i wartość równą zeru tylko w punkcie $x = 0$.

Przykładem funkcji dodatnio określonej w przestrzeni R^n jest forma kwadratowa

$$V(x, t) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + ... + c_n x_n^2,\ c_i > 0,\ i = 1, ..., n.$$

Przykładem funkcji ujemnie określonej w przestrzeni R^n jest forma kwadratowa

$$V(x, t) = -(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + ... + c_n x_n^2),\ c_i > 0,\ i = 1, ..., n.$$

Funkcja skalarna $V(x, t)$ wektora stanu i czasu nazywa się funkcją dodatnio (ujemnie) półokreśloną w obszarze D zawierającym punkt $x = 0$, jeżeli funkcja ta w każdym punkcie tego obszaru przybiera dla $t \geq t_0$ wartość nieujemną (niedodatnią) i wartość równą zeru w punkcie $x = 0$.

Przykładem funkcji dodatnio półokreślonej w przestrzeni R^n jest forma kwadratowa

$$V(x,t) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + ... + c_{n-1} x_{n-1}^2,\ c_i > 0,$$

$i = 1, ..., n-1$. Funkcja $V(x,t)$ przyjmuje w tym przypadku wartość zerową w niezerowym punkcie
$x = (0, ..., 0, 1)$, gdyż $V(0, ..., 0, 1, t) = 0$.

Przykładem funkcji ujemnie półokreślonej w przestrzeni R^n jest forma kwadratowa

$$V(x,t) = -(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + ... + c_{n-1} x_{n-1}^2), \quad c_i > 0,$$

$i = 1, ..., n$. Funkcja $V(x,t)$ przyjmuje również w tym przypadku wartość zerową w niezerowym punkcie $x = (0, ..., 0, 1)$, gdyż $V(0, ..., 0, 1, t) = 0$.

W metodzie Lapunowa posługujemy się pochodną funkcji $V(x,t)$ względem czasu wzdłuż trajektorii stanu układu. Pochodna ta ma postać

$$\dot{V}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} f_i(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right).$$

W szczególności dla układów stacjonarnych, równania stanu których nie zależą od czasu, funkcja $V(x)$ również nie zależy od czasu i jej pochodna względem czasu przyjmuje postać

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) = V_x(x) f(x),$$

gdzie $V_x = (V_{x_1}(x), V_{x_2}(x), ..., V_{x_n}(x))$, a $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$.

• **Definicja funkcji Lapunowa:** Skalarna funkcja $V(x,t)$ wektora stanu x i czasu t, ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi względem zmiennych stanu, nazywa się funkcją Lapunowa w obszarze D obejmującym zerowy punkt równowagi, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

(1) funkcja ta jest dodatnio określona w obszarze D,

(2) pochodna tej funkcji względem czasu wzdłuż trajektorii stanu układu jest ujemnie określona (ujemnie półokreślona) w tym obszarze,

(3) w przypadku nieograniczonego obszaru $D = R^n$ funkcja ta spełnia warunek promieniowej nieograniczoności $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$.

• **Definicja antyfunkcji Lapunowa:** Skalarna funkcja $V(x,t)$ wektora stanu x i czasu t, ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi względem zmiennych stanu, nazywa się antyfunkcją Lapunowa w obszarze D obejmującym zerowy punkt równowagi, jeżeli spełnia ona następujące warumki:

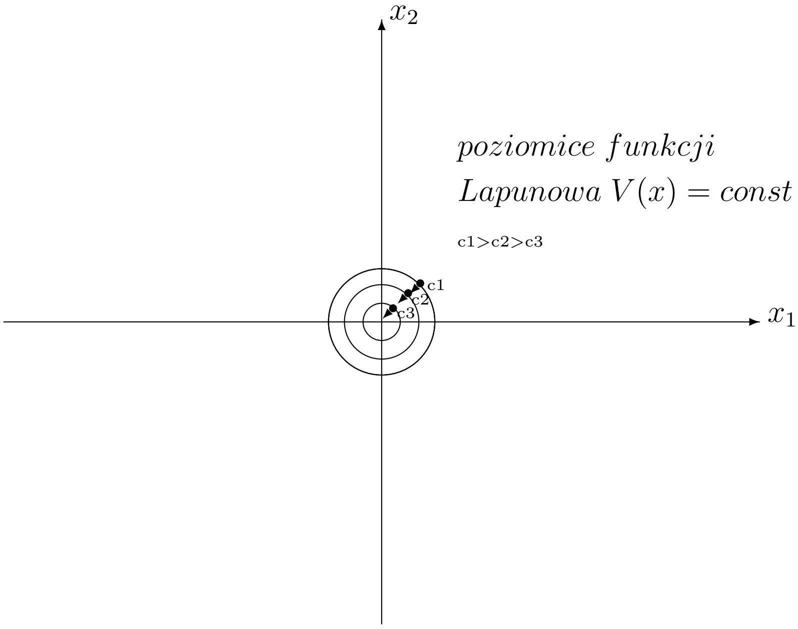
(1) funkcja ta jest dodatnio określona w obszarze D,

(2) pochodna tej funkcji względem czasu wzdłuż trajektorii stanu układu jest dodatnio określona w tym obszarze,

(3) w przypadku nieograniczonego obszaru $D = R^n$ funkcja ta spełnia warunek promieniowej nieograniczoności $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$.

Twierdzenie Lapunowa o stabilności nieliniowych układów sterowania: Punkt równowagi $x_r = 0$ nieliniowego układu sterowania jest stabilny lokalnie asymptotycznie w obszarze D obejmującym zerowy punkt równowagi, jeżeli w tym obszarze do rozważanego układu sterowania można dobrać funkcję Lapunowa. Jeżeli pochodna funkcji $\dot{V}$ jest funkcją ujemnie półokreśloną w obszarze D, to układ jest lokalnie stabilny, lecz niekoniecznie asymptotycznie stabilny. Jeżeli natomiast funkcja Lapunowa jest określona w nieograniczonym obszarze $D = R^n$, to układ jest stabilny globalnie asymptotycznie.

Dowód: Ponieważ funkcja $V(x(t))$ jest z założenia monotonicznie malejącą funkcją czasu, gdyż $\dot{V}(x(t)) < 0$, więc punkt opisujący trajektorię stanu przesuwa się w kierunku zmniejszania się wartości funkcji V.



Jeśli przesuwanie to nie dąży do punktu zerowego $x = 0$ (w którym funkcja V ma najmniejszą wartość), to oznacza to , że trajektoria stanu nawija się asymptotycznie na pewną krzywą graniczną, na której pochodna $\dot{V}$ przyjmuje (jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym) wartość maksymalną $\dot{V} = -b, \; b > 0$. Wynika to z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresu dolnego i górnego przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym.

• **Definicja zbioru zwartego:** *Zbiór X w przestrzeni unormowanej nazywa się zbiorem zwartym, jeżeli z każdego ciągu $\{x_k\}$ elementów zbioru X można wybrać podciąg $\{x_{k_l}\}$ zbieżny do pewnego elementu $x \in X$.*

W przestrzeni $X \subset R^n$ zbiór zwarty to zbiór domknięty i ograniczony.

• **Twierdzenie Weierstrassa:** *Funkcja ciągła $F : R^n \rightarrow R$ osiąga maksimum i minimum na zbiorze zwartym $X \subset R^n$.*

Dowód: Niech $c = \sup_{x \in X} F(x)$ (kres górny wartości F na X). Oznacza to, że istnieje ciąg $\{x_k\}$ elementów zbioru X taki, że $F(x_k) \rightarrow c$. Ze względu na zwartość zbioru X z ciągu $\{x_k\}$ można wybrać podciąg $\{x_{k_l}\}$ taki, że $x_{k_l} \rightarrow \hat{x}, \; \hat{x} \in X$. Ponieważ funkcja F jest ciągła z założenia, więc

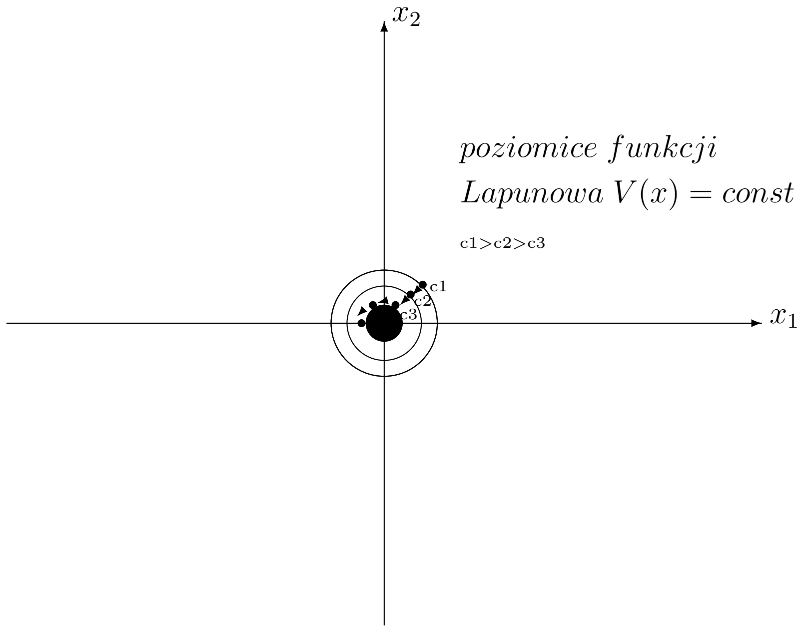
$$F(\hat{x}) = \lim_{x_{k_l} \rightarrow \hat{x}} F(x_{k_l})$$

i $F(\hat{x}) = c$. Tak więc funkcja F osiąga kres górny na elemencie $\hat{x}$ należącym do zbioru X. Analogiczny dowód dotyczy osiągania kresu dolnego.

Implikuje to dla funkcji Lapunowa zależności

$$V(t) = V_0 + \int_0^t \dot{V}(t)dt \leq V_0 - bt \Rightarrow V(\bar{t}) < 0,$$

gdzie $\bar{t}$ jest dostatecznie dużą chwilą czasu. Przeczy to jednak dodatniości funkcji V.



Twierdzenie Lapunowa o niestabilności nieliniowych układów sterowania: Punkt równowagi $x_r = 0$ nieliniowego układu sterowania jest niestabilny w obszarze D obejmującym ten punkt, jeżeli w tym obszarze do rozważanego układu sterowania można dobrać antyfunkcję Lapunowa. Oznacza to, że zaburzona trajektoria stanu wykroczy poza obszar D. Jeżeli natomiast antyfunkcja Lapunowa jest określona w nieograniczonym obszarze $D = R^n$, to układ jest niestabilny globalnie tj. zaburzona trajektoria stanu nieograniczenie oddala się od punktu równowagi.

Dowód: W tym przypadku punkt bieżący trajektorii stanu przesuwa się w kierunku zwiększania się funkcji V. W obszarze tym $\dot{V} > 0$, przy czym pochodna $\dot{V}$ przyjmuje (jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym) wartość minimalną $\dot{V} = b,\ b > 0$. Implikuje to zależności

$$V(t) = V_0 + \int_0^t \dot{V}(t)dt \geq V_0 + bt.$$

Istnieje więc dostatecznie duża chwila czasu $\bar{t}$, dla której funkcja V będzie większa od jej maksymalnej wartości w obszarze D. Oznacza to, że trajektoria stanu wyjdzie na zewnątrz obszaru D. Jeżeli zaś $D = R^n$, to wartości funkcji V będą nieograniczenie narastać i punkt bieżący trajektorii stanu będzie nieograniczenie oddalać się od punktu równowagi tj.

$$\lim_{t\to+\infty} ||x(t)|| = +\infty.$$

• Dobór funkcji Lapunowa w postaci form kwadratowych.

Przykład 1: Równania stanu układu mają postać

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \bar{u}x_1(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + \bar{u}x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

gdzie $\bar{u} > 0$.

Przewidujemy funkcję Lapunowa w postaci formy kwadratowej

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2, \;\; c_i > 0, \; i = 1, 2 \Rightarrow V(x) > 0.$$

$$\dot{V}(x) = 2c_1x_1\dot{x}_1 + 2c_2x_2\dot{x}_2 =$$

$$2c_1x_1(-x_1 + x_2 + \bar{u}x_1(x_1^2 + x_2^2))$$

$$+2c_2x_2(-x_1 - x_2 + \bar{u}x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$= -2c_1x_1^2 + 2c_1x_1x_2 + 2c_1\bar{u}x_1^2(x_1^2$$

$$+x_2^2) - 2c_2x_1x_2 - 2c_2x_2^2 + 2c_2\bar{u}x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$c_1 = c_2 = c \quad \Rightarrow \dot{V}(x) = 2c(x_1^2 + x_2^2)(\bar{u}(x_1^2 + x_2^2) - 1).$$

Układ sterowania jest więc lokalnie asymptotycznie stabilny w obszarze $x_1^2 + x_2^2 < 1/\bar{u}$.

Przykład 2: Równania stanu układu mają postać

$$\dot{x}_1 = x_2 - \bar{u}x_1(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - \bar{u}x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

gdzie $\bar{u} > 0$.

Przewidujemy funkcję Lapunowa w postaci formy kwadratowej

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2, \;\; c_i > 0, \; i = 1, 2.$$

$$c_i > 0, \; i = 1, 2 \Rightarrow V(x) > 0.$$

$$\dot{V}(x) = 2c_1x_1\dot{x}_1 + 2c_2x_2\dot{x}_2 =$$

$$2c_1x_1(x_2 - \bar{u}x_1(x_1^2 + x_2^2))$$

$$+2c_2x_2(-x_1 - \bar{u}x_2(x_1^2 + x_2^2))$$

$$c_1 = c_2 = c \Rightarrow -2c\bar{u}(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0.$$

Ponieważ funkcja V spełnia warunek promieniowej nieograniczoności

$$\lim_{||x|| \to +\infty} c(x_1^2 + x_2^2) = +\infty,$$

więc układ sterowania jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Przykład 3: Równania stanu układu mają postać

$$\dot{x}_1 = -\bar{u}x_2 + x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3.$$

Przewidujemy funkcję Lapunowa w postaci formy kwadratowej

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2, \quad c_i > 0, \ i = 1, 2.$$

$$c_i > 0, \ i = 1, 2 \Rightarrow V(x) > 0.$$

$$\dot{V}(x) = 2c_1x_1\dot{x}_1 + 2c_2x_2\dot{x}_2 =$$

$$2c_1x_1(-\bar{u}x_2 + x_1^2) + 2c_2x_2(x_1 + x_2^3))$$

$$c_1 = 1, \ c_2 = \bar{u} \Rightarrow 2x_1^4 + 2\bar{u}x_2^4 > 0.$$

Tak więc funkcja V okazała się antyfunkcją Lapunowa określoną w całej przestrzeni R^n, co oznacza że układ sterowania jest globalnie niestabilny.

• Dobór funkcji Lapunowa w postaci uogólnionych form kwadratowych (metoda Krasowskiego).

Przewidujemy funkcję Lapunowa w postaci uogólnionej formy kwadratowej bezpośrednio powiązanej z równaniami stanu układu

$$V(x) \doteq f^T(x)Mf(x),$$

gdzie $f(x)$ oznacza prawą stronę równania stanu zredukowanego układu sterowania tj. równania $\dot{x} = f(x)$.

Niech $J(x) \doteq \partial f(x)/\partial x$ oznacza macierz Jacobiego. W tym zapisie uzyskujemy

$$\dot{f}(x) = \partial f(x)/\partial \dot{x} = J(x)f(x), \quad \dot{f}^T(x) = f^T(x)J^T(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{f}^T(x)Mf(x) + f^T(x)M\dot{f}(x)\\ &= f^T(x)J^T(x)Mf(x) + f^T(x)MJ(x)f(x)\\ &= f^T(x)(J^T(x)M + MJ(x))f(x)\\ &= -f^T(x)N(x)f(x), \quad -N(x) \doteq J^T(x)M + MJ(x).\end{aligned}$$

Zakładamy dodatnio określoną macierz M np. $M = I$ i wyznaczamy macierz $N(x)$. Jeśli ta ostatnia macierz jest dodatnio określona w obszarze D, to układ jest stabilny asymptotycznie w tym obszarze.

Przykład: Równania stanu zredukowanego nieliniowego układu sterowania mają postać

$$\dot{x}_1 = \bar{u}(-x_1^3 - x_2), \quad \dot{x}_2 = \bar{u}(x_1 - x_2^5),$$

gdzie $\bar{u} > 0$ jest statycznym sterowaniem. Przyjmując $M = I$ uzyskujemy

$$V(x) = f^T(x)f(x) = \bar{u}^2((x_1^3 + x_2)^2) + (x_1 - x_2^5)^2)$$

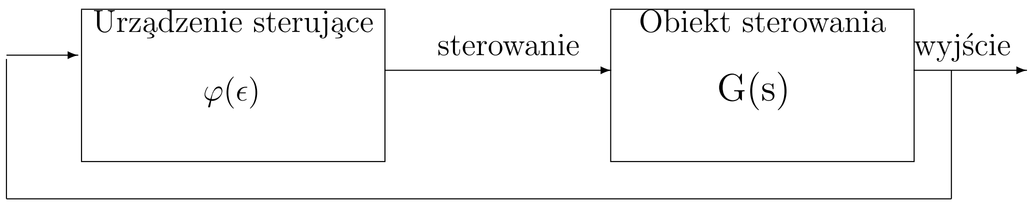
$$\Rightarrow V(x) > 0.$$

$$J(x) = \bar{u}\begin{pmatrix} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & -5x_2^4 \end{pmatrix},$$

$$N(x) = -(J^T(x) + J(x)) = \bar{u}\begin{pmatrix} 6x_1^2 & 0 \\ 0 & 10x_2^4 \end{pmatrix}.$$

Macierz $N(x)$ jest dodatnio określona w całej przestrzeni stanu, a więc układ jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Stabilność zamkniętych nieliniowych układów sterowania - metoda Łurie



Założenia:

• Funkcja $\varphi(\epsilon)$ jest nieliniową funkcją taką, że $\varphi(0) = 0$, $\epsilon\varphi(\epsilon) > 0$ dla $\epsilon \neq 0$,

• Transmitancja części liniowej układu jest wymierna $G(s) = L(s)/M(s)$ i równanie $M(s) = 0$ ma pojedyncze rzeczywiste i ujemne pierwiastki $s_1, s_2, ..., s_n$.

Stosujemy rozkład transmitancji na ułamki proste

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s - s_i}.$$

Przechodzimy od operatorowego opisu układu do jego opisu za pomocą wektora stanu.

$$X_i(s) = \frac{1}{s - s_i} U(s) \Rightarrow \dot{x}_i(t) = s_i x_i(t) + u(t)$$

$$u(t) = \varphi(\epsilon(t)), \quad \epsilon(t) = -y(t), \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$$

Mamy więc

$$\dot{x}_i(t) = s_i x_i(t) + \varphi(-\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)), \quad i = 1, ..., n$$

czyli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(-cx(t)),$$

gdzie

$$A \doteq diag_{1 \leq i \leq n}(s_i), \quad B = (1, 1, ..., 1)^T, \quad c \doteq (c_1, c_2, ..., c_n).$$

Proponujemy funkcję Lapunowa w postaci sumy dwóch składowych

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x),$$

gdzie

$$V_1(x) \doteq 0.5 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2, \quad V_2(x) \doteq -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j x_i x_j}{s_i + s_j},$$

gdzie $\alpha_i > 0$.

Ponieważ

$$\int_0^\infty e^{(s_i+s_j)t} dt = \frac{1}{s_i + s_j} e^{(s_i+s_j)t}|_0^\infty = -\frac{1}{s_i + s_j},$$

więc

$$V(x) = 0.5\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2 + \int_0^{\infty}(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i e^{s_i t})^2 dt.$$

Oznaczamy

$$R = 0.5diag(\alpha_i), \;\; P = (p_{ij}), \;\; p_{ij} = -\frac{a_i a_j}{s_i + s_j}.$$

Oznacza to, że

$$V(x) = x^T(R+P)x = x^T Q x, \;\; Q = R + P.$$

Stąd

$$\dot{V}(x) = x^T(AQ + QA)x + x^T(2QB - c^T)\varphi(\epsilon) - \epsilon\varphi(\epsilon).$$

Uzyskujemy stąd następujące warunki stabilności układu zamkniętego:

• Macierz $AQ + QA$ powinna być ujemnie określona,

• Współczynniki $a_i, \; i = 1, ..., n$ powinny być dobrane tak, aby było spełnione równanie $2QB - c^T = 0$.

Przykład: Część nieliniowa układu opisywana jest funkcją $\varphi(\epsilon) \doteq \epsilon^3$, zaś część liniowa opisywana jest transmitancją

$$G(s) \doteq \frac{26s + 45}{3(s^2 + 3s + 2)}.$$

Z rozkładu transmitancji na ułamki proste uzyskujemy

$$G(s) = \frac{19/3}{s+1} + \frac{7/3}{s+2},$$

a więc $s_1 = -1, \; s_2 = -2, \; c_1 = 19/3, \; c_2 = 7/3, \; A = diag(-1, -2)$. Niech $\alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = 1/2$ tj. $V_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2$. Określamy macierz $Q = R + P$, gdzie

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} a_1^2/2 & a_1 a_2/3 \\ a_1 a_2/2 & a_2^2/4 \end{pmatrix}.$$

Równanie $2QB - c^T = 0$ przybiera postać

$$\begin{pmatrix} 1+a_1^2 & \frac{2a_1a_2}{3} \\ \frac{2a_1a_2}{3} & \frac{1}{2}+\frac{a_2^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}.$$

Określamy rozwiązanie ostatniego równania uzyskując współczynniki $a_1 = 2,\ a_2 = 1$ oraz macierze

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5/2 & 2/3 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$A^TQ + QA = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzamy warunek ujemnej określoności ostatniej macierzy tj.

$$(-1)^k \Delta_k > 0,\ k = 1, ..., n,$$

gdzie Δ_k są minorami głównymi macierzy. Ponieważ warunek ten jest spełniony, więc badany układ nieliniowy jest stabilny globalnie asymptotycznie.

Metoda funkcji Lapunowa dla liniowych układów sterowania

Przyjmujemy dla zredukowanego liniowego układu sterowania $\dot{x} = Ax$ funkcję Lapunowa w postaci $V(x) = x^T Mx$, gdzie macierz M jest dodatnio określona ($M > 0$). Tak więc $V(x) > 0$ dla $x \in R^n$.

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Mx + x^T M\dot{x}$$

$$= x^T(A^TM + MA)x = -x^T Nx,$$

$$-N = A^TM + MA.$$

Oznacza to, że zastosowanie metody funkcji Lapunowa do badania stabilności liniowych układów sterowania polega na doborze macierzy dodatnio określonej $M > 0$ i macierzy dodatnio określonej $N > 0$, które powiązane są zależnością $-N = A^TM + MA$.

Przykład 3: Niech macierz stanu zredukowanego liniowego układu sterowania ma postać

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujemy macierz M jako

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Założymy macierz N jako macierz dodatnio określoną $N = I$ i rozwiążemy równanie macierzowe.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Stąd $-1 = -6m_1$, $0 = -7m_2 - 7m_1$, $-1 = -14m_2 - 8m_3$
tj.

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 5/12 \end{pmatrix}.$$

Macierz M jest dodatnio określona, a więc układ jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Twierdzenie: Jeżeli punkt równowagi $x_r = 0$ liniowego układu sterowania jest asymptotycznie stabilny, to do każdej macierzy $N > 0$ można dobrać macierz $M > 0$ spełniającą równanie $-N = A^T M + MA$.

Dowód: Rozważmy macierzowe równanie różniczkowe Lapunowa

$$\dot{L}(t) = A^T L(t) + L(t)A, \quad L(0) = N.$$

Przewidujemy rozwiązanie tego równania w postaci

$$L(t) = e^{A^T t} N e^{At}.$$

Weryfikacja rozwiązania równania

$$\dot{L}(t) = A^T e^{A^T t} N e^{At} + e^{A^T t} N e^{At} A = A^T L(t) + L(t)A.$$

Weryfikacja warunku początkowego

$$L(0) = e^{A^T 0} N e^{A0} = N.$$

Całkujemy równanie różniczkowe Lapunowa od zera do nieskończoności

$$L(\infty) - L(0) = A^T \int_0^\infty L(t)dt + \int_0^\infty L(t)dtA.$$

Ponieważ macierz A ma z założenia wartości własne w lewej półpłaszczyźnie, więc $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$ i $L(\infty) = 0$.

Wobec tego zachodzi równość

$$-N = A^T \int_0^\infty L(t)dt + \int_0^\infty L(t)dtA$$

czyli

$$M = \int_0^\infty L(t)dt = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} dt.$$

Ponieważ

$$e^{A^T t} N e^{At} = \big(\ldots \sum_{i,j=1,\ldots,n} C_{ij} t^p e^{(s_i+s_j)t} \ldots\big),$$

a s_i mają ujemne części rzeczywiste, to $\int_0^\infty L(t)dt$ zawsze istnieje. Macierz $M = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} dt$ jest dodatnio określona, gdyż

$$x^T M x = x^T (\int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} dt) x$$

$$= \int_0^\infty (e^{At} x)^T N (e^{At} x) dt = \int_0^\infty z^T(t) N z(t) dt > 0,$$

gdyż macierz N jest dodatnio określona, zaś $z(t) > 0$ dla $x \neq 0$.

Pośrednia (pierwsza) metoda Lapunowa badania stabilności nieliniowych układów sterowania

Metoda ta określona jest jako pośrednia, gdyż za pomocą tej metody badamy stabilność układów nieliniowych pośrednio na podstawie badania stabilności ich liniowych aproksymacji.

Metoda ta polega na linearyzacji zredukowanego nieliniowego równania stanu $\dot{x} = f(x)$ w otoczeniu zerowego punktu równowagi: $\dot{x} = Ax + r(x)$, gdzie $A = (\partial f_i / \partial x_j)$ jest macierzą Jacobiego układu, a $r(x)$ jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż x tj. $\lim_{||x|| \to 0} r(x)/x = 0$. Układ nieliniowy zastępujemy jego liniową aproksymacją $\dot{x} = Ax$ i formułujemy warunki stabilności lokalnej układu nieliniowego (w małym otoczeniu punktu równowagi) wynikające z badania stabilności liniowej aproksymacji tego układu.

Jeśli w pierwotnym układzie badamy niezerowy statyczny punkt pracy $(\bar{x}, \bar{u})$, to obliczanie macierzy Jacobiego w zerowym zredukowanym punkcie równowagi $A = (\partial f_i / \partial x_j)|_{\tilde{x}=0}$ jest równoważne z obliczaniem tej macierzy w statycznym punkcie pracy układu pierwotnego $A = (\partial f_i / \partial x_j)|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$, co wynika z określenia przekształcenia redukcyjnego $x = \tilde{x} + \bar{x}$.

Pośrednia metoda Lapunowa: *Układ nieliniowy jest lokalnie stabilny asymptotycznie w zerowym punkcie równowagi, jeżeli jego liniowa aproksymacja jest stabilna asymptotycznie w tym punkcie. Układ nieliniowy jest niestabilny , jeżeli jego liniowa aproksymacja jest niestabilna. Jeżeli liniowa aproksymacja układu jest stabilna, lecz niekoniecznie asymptotycznie, to o stabilności układu nieliniowego nic nie można wnioskować na podstawie badania stabilności układu zlinearyzowanego.*

Dowód: Załóżmy, że dobraliśmy funkcję Lapunowa dla układu zlinearyzowanego:

$$V(x) = x^T M x, \quad \dot{V}(x) = -x^T N x, \quad M > 0, \quad N > 0.$$

Uwzględniamy resztę z liniowej aproksymacji

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A + r(x))^T M + M(A + r(x)) \\ &= x^T (A^T M + MA)x + x^T (r^T M + Mr(x))x \end{aligned}$$

$$= -x^T N x + 2r(x)x.$$

Dla małych x wyrażenie $2r(x)x$ jest małe w porównaniu z wyrażeniem $x^T N x$ i o znaku wyrażenia $\dot{V}(x)$ decyduje człon $-x^T N x$. Ponieważ jest on ujemny, więc układ nieliniowy jest lokalnie asymptotycznie stabilny (lokalnie w obszarze, w którym $||2r(x)x|| < ||x^T N x||$.

Podobnie dla dodatniego wyrażenia $-x^T N x$ (układ zlinearyzowany jest niestabilny) o znaku pochodnej $\dot{V}(x)$ decyduje lokalnie dodatnie wyrażenie $-x^T N x$ a zatem układ nieliniowy jest niestabilny w małym otoczeniu punktu równowagi.

Jeżeli liniowa aproksymacja układu jest stabilna, lecz niekoniecznie asymptotycznie, to wyrażenie $-x^T N x$ może przyjmować niezerowe wartości dla stanów niezerowych i o znaku wyrażenia $-x^T N x + 2r(x)x$ nic nie można powiedzieć.

Przykład: Proces mieszania substancji prowadzony jest w mieszalniku, do którego doprowadzany jest strumień substancji o maym stężeniu składnika użytecznego c_1 z natężeniem $u_1(t)$ oraz strumień substancji o dużym stężeniu składnika użytecznego c_2 z natężeniem $u_2(t)$. Wyróżniając w charakterze zmiennych stanu zapełnienie mieszalnika $x_1(t)$ w chwili t oraz ilość substancji użytecznej $x_2(t)$ w mieszalniku w chwili t można równania stanu procesu przedstawić w postaci

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - \alpha\sqrt{x_1}(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) - \alpha x_2(t)/\sqrt{x_1}(t).$$

Zakładamy,że proces prowadzony jest w statycznym punkcie pracy układu spełniającym równania

$$0 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \alpha\sqrt{\bar{x}_1},$$
$$0 = c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 - \alpha\bar{x}_2/\sqrt{\bar{x}_1}.$$

Linearyzujemy układ sterowania obliczając macierz Jacobiego w statycznym punkcie pracy

$$\partial f_1(\bar{x},\bar{u})/\partial x_1 = -\frac{\alpha}{2\sqrt{\bar{x}_1}},$$
$$\partial f_1(\bar{x},\bar{u})/\partial x_2 = 0,$$
$$\partial f_2(\bar{x},\bar{u})/\partial x_1 = \frac{\alpha\bar{x}_2}{2\bar{x}_1^{3/2}},$$
$$\partial f_2(\bar{x},\bar{u})/\partial x_2 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\bar{x}_1}}.$$

Tak więc

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2\bar{x}_1^{0.5}} & 0 \\ \frac{\alpha\bar{x}_2}{2\bar{x}_1^{3/2}} & -\frac{\alpha}{\sqrt{\bar{x}_1}} \end{pmatrix}, sI - A = \begin{pmatrix} s + \frac{\alpha}{2\sqrt{\bar{x}_1}} & 0 \\ -\frac{\alpha\bar{x}_2}{2\bar{x}_1^{3/2}} & s + \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{x}_1}} \end{pmatrix}$$

i

$$det(sI - A) = (s + \frac{\alpha}{2\sqrt{\bar{x}_1}})(s + \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{x}_1}}).$$

Wartości własne układu zlinearyzowanego $s_1 = -\frac{\alpha}{2\sqrt{\bar{x}_1}}$ i $s_2 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\bar{x}_1}}$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, a zatem układ zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny dla dowolnych dodatnich wartości parametru α. Oznacza to, że układ nieliniowy jest lokalnie asymtotycznie stabilny dla dowolnych dodatnich wartości parametru α.

Przykład: Chemiczny proces produkcyjny $A + B \rightarrow C$ polegający na syntezie substancji użytecznej C ze składników surowcowych A i B opisywany jest za pomocą równań stanu

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - x_1(t) - x_1(t)x_2^\alpha(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = u_2(t) - x_2(t) - x_1^\beta(t)x_2(t).$$

Zakładamy, że proces prowadzony jest w statycznym punkcie pracy układu $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1)$ wymuszanym przez statyczne sterowanie $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (2, 2)$. Równania punktu pracy układu przybierają postać

$$0 = \bar{u}_1 - \bar{x}_1 - \bar{x}_1\bar{x}_2^\alpha,$$
$$0 = \bar{u}_2 - \bar{x}_2 - \bar{x}_1^\beta\bar{x}_2.$$

Linearyzujemy układ sterowania obliczając macierz Jacobiego w statycznym punkcie pracy

$$\partial f_1(\bar{x}, \bar{u})/\partial x_1 = -1 - \bar{x}_2^\alpha = -2,$$
$$\partial f_1(\bar{x}, \bar{u})/\partial x_2 = -\bar{x}_1\alpha\bar{x}_2^{\alpha-1} = -\alpha,$$
$$\partial f_2(\bar{x}, \bar{u})/\partial x_1 = -\beta\bar{x}_1^{\beta-1}\bar{x}_2,$$
$$\partial f_2(\bar{x}, \bar{u})/\partial x_2 = -1 - \bar{x}_1^\beta = -2.$$

Tak więc

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -\alpha \\ -\beta & -2 \end{pmatrix}, sI - A = \begin{pmatrix} s+2 & \alpha \\ \beta & s+2 \end{pmatrix}$$

i

$$det(sI - A) = (s+2)^2 - \alpha\beta = s^2 + 4s + 4 - \alpha\beta.$$

Stosując kryterium Hurwitza stabilności układów liniowych uzyskujemy warunek stabilności parametrycznej $\alpha\beta < 4$.

Dla poprawy własności stabilnościowych procesu wprowadzamy sprzężenie zwrotne

$$u_1(t) = \bar{u}_1 - \kappa_1(x_1(t) - \bar{x}_1), \ \ u_2(t) = \bar{u}_2 - \kappa_2(x_2(t) - \bar{x}_2),$$

gdzie κ_1 i κ_2 są dodatnimi współczynnikami sprzężenia zwrotnego

Jeśli stężenie składnika x_i jest większe od zadanego poziomu, to sprzężenie zwrotne zapewni jego zmniejszenie, jeśli zaś stężenie to jest mniejsze od zadanego poziomu, to sprzężenie zwrotne zapewni jego zwiększenie.

Równania stanu po wprowadzeniu sprzężenia zwrotnego przybiorą postać

$$\dot{x}_1(t) = \bar{u}_1 - \kappa_1(x_1(t) - \bar{x}_1) - x_1(t) - x_1(t)x_2^{\alpha}(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \bar{u}_2 - \kappa_2(x_2(t) - \bar{x}_2) - x_2(t) - x_1^{\beta}(t)x_2(t).$$

Uzyskujemy w tym przypadku

$$A = \begin{pmatrix} -2-\kappa_1 & -\alpha \\ -\beta & -2-\kappa_2 \end{pmatrix}, sI - A = \begin{pmatrix} s+2+\kappa_1 & \alpha \\ \beta & s+2+\kappa_2 \end{pmatrix},$$

$$det(sI - A) = (s+2+\kappa_1)(s+2+\kappa_2) - \alpha\beta$$

$$= s^2 + (4+\kappa_1+\kappa_2)s + 4 + 2(\kappa_1+\kappa_2) + \kappa_1\kappa_2 - \alpha\beta > 0.$$

Na podstawie kryterium Hurwitza uzyskujemy nowy warunek stabilności parametrycznej

$$\alpha\beta < 4 + 2(\kappa_1+\kappa_2) + \kappa_1\kappa_2.$$

Wprowadzenie sprzężenia zwrotnego poprawiło własności stabilnościowe układu rozszerzając jego obszar stabilności parametrycznej.

Stabilność nieliniowych okresowych procesów sterowania

Niech wyróżniony proces sterowania będzie procesem τ-okresowym tj.

$$\boldsymbol{x}(t+\tau) = \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{u}(t+\tau) = \boldsymbol{u}(t)$$

spełniającym równanie stanu z warunkiem okresowości

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad t \in [0, \tau], \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{x}(0),$$

przy czym funkcja f może bezpośrednio zależeć okresowo od czasu tj.

$$f(x, u, t+\tau) = f(x, u, t)$$

dla każdej dopuszczalnej pary (x, u) (okresowy przebieg procesu jest wymuszany przez okresowo zmienne warunki funkcjonowania obiektu sterowania) albo funkcja ta może pośrednio okresowo zależeć od czasu ze względu na okresowy przebieg sterowania

$$f(x, u(t+\tau)) = f(x, u(t))$$

(okresowy przebieg procesu wymuszany jest przez stosowanie okresowego sterowania).

Zredukowany układ sterowania dla wyróżnionego okresowego procesu sterowania przybiera postać

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t),$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(t) + \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) - f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

Układ zlinearyzowany będzie więc w tym przypadku układem niestacjonarnym z macierzą stanu zależną od czasu

$$A(t) = f_x(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad A(t+\tau) = A(t).$$

Zastosowanie pośredniej (pierwszej) metody Lapunowa do badania stabilności okresowych procesów sterowania sprowadza się do badania stabilności niestacjonarnego układu liniowego

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t+\tau) = A(t).$$

Lemat: Znormalizowana macierz fundamentalna $\Phi(t) = \Phi(t, 0)$ liniowego okresowego układu sterowania posiada reprezentację

$$\Phi(t) = \Gamma(t)e^{\Lambda t}, \;\; t \in [0, +\infty),$$

gdzie $\Gamma(t)$ jest nieosobliwą macierzą okresową, zaś Λ jest macierzą stałą.

Twierdzenie: Nieliniowy okresowy układ sterowania jest stabilny lokalnie asymptotycznie jeżeli jego liniowa aproksymacja jest stabilna asymptotycznie (tj. jeżeli wszystkie multyplikatory danej trajektorii okresowej leżą wewnątrz koła jednostkowego). Układ ten jest niestabilny jeżeli jego liniowa aproksymacja jest niestabilna (tj. jeżeli przynajmniej jeden multyplikator danej trajektorii okresowej leży poza kołem jednostkowym). Jeżeli liniowa aproksymacja układu jest stabilna lecz nieasymptotycznie (tj. multyplikatory danej trajektorii okresowej leżą wewnątrz koła jednostkowego i na jego brzegu), to o stabiności nieliniowego okresowego układu sterowania nic nie można wnioskować na postawie badania stabilności jego liniowej aproksymacji.

Stabilność nieliniowych dyskretnych układów sterowania.

W teorii stabilności układów sterowania z czasem dyskretnym badamy wrażliwość dyskretnej trajektorii stanu na zaburzenia stanu początkowego.

$$(x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \;\; k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ...$$

$$x(k_0) = x_0) \Rightarrow$$

$$(x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \;\; k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ...$$

$$x(k_0) = x_0 + \delta x_0).$$

Niech $\mathbf{x}(k)$ będzie wyróżnioną dyskretną trajektorią stanu związaną z wyróżnionym stanem początkowym $\mathbf{x}_0$ i z wyróżnionym sterowaniem $\mathbf{u}(k)$. Spełnia ona równanie stanu

$$\mathbf{x}(k) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k), k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ...$$

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$$

Jak zmieni się przebieg wyróżnionej dyskretnej trajektorii stanu, jeśli nastąpi zaburzenie wyróżnionego stanu początkowego ?

Analizę warunków stabilności układów sterowania z czasem dyskretnym można sprowadzić do badania stabilności tzw. zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania określonego za pomocą przekształcenia

$$(\tilde{x}(k) = x(k) - \mathbf{x}(k)) \Rightarrow (x(k) = \tilde{x}(k) + \mathbf{x}(k)).$$

Równanie stanu względem nowych współrzędnych stanu przybierze postać

$$\tilde{x}(k+1) + \mathbf{x}(k+1) = f(\tilde{x}(k) + \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k),$$

czyli

$$\tilde{x}(k+1) = f(\tilde{x}(k) + \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) - f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k).$$

Definiując prawą stronę przekształconego równania stanu jako

$$\tilde{f}(\tilde{x}(k), t) = f(\tilde{x}(k) + \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) - f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

możemy zapisać to równanie w postaci

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{f}(\tilde{x}(k), k).$$

Rozwiązanie zerowe $\tilde{x}(k) = 0$ ostatniego równania jest równoważne z wyróżnionym rozwiązaniem $\mathbf{x}(k)$ równania pierwotnego. Rozwiązanie to jest punktem równowagi układu przekształconego, gdyż

$$\tilde{f}(0, k) = f(0 + \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) - f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) = 0.$$

Tak więc badanie stabilności dowolnej wyróżnionej dyskretnej trajektorii stanu układu sterowania można sprowadzić do badania zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania z czasem dyskretnym.

• **Definicja stabilności asymptotycznej dyskretnego układu sterowania w obszarze:** Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania z czasem dyskretnym nazywa się punktem asymptotycznie stabilnym w obszarze D obejmującym ten punkt, jeżeli zachodzi implikacja

$$\big(x(k_0) \in D\big) \Rightarrow (\lim_{k \to \infty} ||x(k)|| = 0),$$

gdzie $||x|| \doteq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$.

• **Definicja globalnej stabilności asymptotycznej dyskretnego układu sterowania:** Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania z czsem dyskretnym nazywa się punktem globalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli $D = R^n$.

• **Definicja lokalnej stabilności asymptotycznej dyskretnego układu sterowania:** Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem lokalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli D jest zbiorem ograniczonym (jeżeli D leży w kuli o promieniu ρ).

• **Definicja funkcji Lapunowa dyskretnego układu sterowania:** Skalarna funkcja $V(x,k)$ wektora stanu x i czasu dyskretnego k, ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi względem zmiennych stanu, nazywa się funkcją Lapunowa w obszarze D obejmującym zerowy punkt równowagi, jeżeli spełnia ona następujące warumki:

(1) funkcja ta jest dodatnio określona w obszarze D tj. $V(x,k) > 0$ dla $x \in D,\ x \neq 0$ oraz $V(0,k) = 0$,

(2) różnica pierwszego rzędu tej funkcji względem czasu dyskretnego wzdłuż dyskretnej trajektorii stanu układu jest ujemnie określona (ujemnie półokreślona) w tym obszarze tj. $\Delta V(x(k),k) = V(x(k+1),k+1) - V(x(k),k) = V(f(x(k),k+1)) - V(x(k),k) < 0$ dla $x(k) \neq 0$ i $\Delta V(0,k) = 0$,

(3) w przypadku nieograniczonego obszaru $D = R^n$ funkcja ta spełnia warunek promieniowej nieograniczoności $\lim_{||x|| \to +\infty} V(x,k) = +\infty$.

• **Definicja antyfunkcji Lapunowa dyskretnego układu sterowania:** Skalarna funkcja $V(x,k)$ wektora stanu x i czasu dyskretnego k, ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi względem zmiennych stanu, nazywa się funkcją Lapunowa w obszarze D obejmującym zerowy punkt równowagi, jeżeli spełnia ona następujące warumki:

(1) funkcja ta jest dodatnio określona w obszarze D,

(2) różnica pierwszego rzędu tej funkcji względem czasu dyskretnego wzdłuż dyskretnej trajektorii stanu układu jest również dodatnio określona w tym obszarze tj. $\Delta V(x(k),k) = V(x(k+1),k+1) - V(x(k),k) = V(f(x(k),k+1)) - V(x(k),k) > 0$ dla $x(k) \neq 0$ i $\Delta V(0,k) = 0$,

(3) w przypadku nieograniczonego obszaru $D = R^n$ funkcja ta spełnia

warunek promieniowej nieograniczoności $\lim_{||x||\to+\infty} V(x,k) = +\infty$.

Twierdzenie Lapunowa o stabilności nieliniowych układów sterowania z czasem dyskretnym: Punkt równowagi $x_r = 0$ nieliniowego układu sterowania z czasem dyskretnym jest stabilny lokalnie asymptotycznie w obszarze D obejmującym zerowy punkt równowagi, jeżeli w tym obszarze do rozważanego układu sterowania można dobrać funkcję Lapunowa. Jeżeli pierwsza różnica funkcji $V(x,k)$ jest funkcją ujemnie półokreśloną w obszarze D, to układ dyskretny jest lokalnie stabilny, lecz niekoniecznie asymptotycznie stabilny. Jeżeli natomiast funkcja Lapunowa jest określona w nieograniczonym obszarze $D = R^n$, to układ jest stabilny globalnie asymptotycznie.

Przykład: Zredukowany dyskretny układ sterowania jest opisywany za pomocą równań stanu

$$x_1(k+1) = 0.5x_2(k), \;\; x_2(k+1) = -0.5x_1^2(k),$$
$$k = 0,1,2,....$$

Zakładamy funkcję Lapunowa układu dyskretnego w postaci formy kwadratowej

$V(x(k)) \doteq x_1^2(k) + x_2^2(k)$.

Obliczamy różnicę pierwszego rzędu funkcji V:

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$
$$= x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$
$$= 0.25x_2^2(k) + 0.25x_1^4(k) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$
$$= -x_1^2(k)(1 - 0.25x_1^2(k) - 0.75x_2^2(k)$$

.

Tak więc $\Delta V(x(k)) < 0$ dla $|x_1(0)| < 2$. Oznacza to, że zerowy punkt równowagi zredukowanego dyskretnego układu sterowania jest stabilny lokalnie asymptotycznie.

Twierdzenie Lapunowa o niestabilności nieliniowych układów sterowania z czasem dyskretnym: Punkt równowagi $x_r = 0$ nieliniowego układu sterowania z czasem dyskretnym jest niestabilny w obszarze D obejmującym ten punkt, jeżeli w tym obszarze do rozważanego układu sterowania można dobrać antyfunkcję Lapunowa. Oznacza to, że zaburzona trajektoria stanu wykroczy poza obszar D. Jeżeli natomiast antyfunkcja Lapunowa jest określona w nieograniczonym obszarze $D = R^n$, to układ jest niestabilny globalnie tj. zaburzona trajektoria stanu nieograniczenie oddala się od punktu równowagi.

Zastosowanie metody funkcji Lapunowa do badania stabilności liniowych stacjonarnych dyskretnych układów sterowania

Z liniowym dyskretnym układem sterowania opisywanym za pomocą równania stanu $x(k+1) = Ax(k)$ wiążemy funkcję Lapunowa postaci $V(x(k)) = x^T Mx$, gdzie M jest macierzą dodatnio określoną. Różnica pierwszego rzędu funkcji V przybiera postać

$$\Delta V(x(k)) = -x^T(k)Nx(k), \quad -N = A^T MA - M.$$

Jeśli istnieją macierze dodatnio określone M i N spełniające ostatnie równanie, to dyskretny układ liniowy jest stabilny globalnie asymptotycznie.

Przykład: Niech macierz stanu liniowego układu dyskretnego ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

i niech $N = I$. Rozwiązujemy równanie $A^T MA - M = -I$ tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stąd uzyskujemy $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $m_3 = 8/3$, a więc macierz M jest dodatnio określona i badany liniowy układ dyskretny jest stabilny globalnie asymptotycznie.

Twierdzenie: Jeżeli punkt równowagi $x_r = 0$ liniowego dyskretnego układu sterowania jest asymptotycznie stabilny, to do każdej macierzy $N > 0$ można dobrać macierz $M > 0$ spełniającą równanie $-N = A^T MA - M$.

Dowód: Przewidujemy rozwiązanie w postaci

$$M = \sum_{p=0}^{\infty} (A^T)^p NA^p.$$

Równanie

$$-N = A^T MA - M$$

jest równoważne z równaniem

$$M = A^T MA + N$$

. Jest to więc równanie punktu stałego $M = F(M)$, gdzie

$$F(M) \doteq A^T MA + N.$$

Określimy macierz M iteracyjnie

$$M_{p+1} = A^T M_p A + N, \ \ p = 0, 1, 2, ...; \ M_0 = 0.$$

Ponieważ z uwagi na asymptotyczną stabilność układu dyskretnego wartości własne macierzy A leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, więc

$$||M_{p+1} - M_p|| = ||(A^T)^p N A^p|| < 1$$

co oznacza, że metoda kolejnych przybliżeń jest zbieżna.

Powyższy wynik stanowi podstawę sformułowania pośredniej (pierwszej) metody Lapunowa dla układów dyskretnych:

Twierdzenie: Jeżeli aproksymacja liniowa dyskretnego układu sterowania jest asymptotycznie stabilna, to dyskretny układ nieliniowy jest stabilny asymptotycznie lokalnie. Jeżeli aproksymacja liniowa dyskretnego układu sterowania jest niestabilna, to dyskretny układ nieliniowy jest niestabilny. Jeżeli zaś aproksymacja liniowa układu dyskretnego jest stabilna lecz niekoniecznie asymptotycznie, to o stabilności nieliniowego układu dyskretnego nic nie można wnioskować na podstawie badania stabilności jego liniowej aproksymacji.