Stabilność liniowych układów sterowania

Stabilność układów z czasem ciągłym

W teorii stabilności układów sterowania badamy wrażliwość trajektorii stanu na zaburzenia stanu początkowego. Interesuje nas czy odchylenie rozwiązania równania zaburzonego od rozwiązania równania pierwotnego będzie zanikać z upływem czasu (w tym przypadku układ sterowania określamy jako stabilny asymptotycznie), czy też odchylenie to będzie pozostawać w pewnym otoczeniu rozwiązania równania pierwotnego (w tym przypadku układ sterowania określamy jako stabilny lecz nieasymptotycznie), lub też czy odchylenie to będzie nieograniczenie narastać z upływem czasu (w tym przypadku układ sterowania określamy jako niestabilny). Badanie stabilności może dotyczyć wyróżnionej trajektorii stanu o pożądanym przebiegu np. trajektorii stałej określającej tzw. punkt równowagi układu. Dla układów liniowych obowiązuje następująca

Definicja: Punkt przestrzeni stanu x_r, dla którego $Ax_r = 0$ dla wszystkich chwil $t \geq 0$, nazywamy punktem równowagi liniowego autonomicznego układu sterowania opisywanego równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \geq 0,\ x(0) = x_0.$$

Jeżeli $detA \neq 0$, to liniowy układ sterowania ma dokładnie jeden punkt równowagi w początku układu współrzędnych tj. zerowy punkt równowagi.

Niech $\bar{x}$ będzie dowolną (niezerową) wyróżnioną stałą trajektorią stanu liniowego układu sterowania związaną z wyróżnionym stałym sterowaniem $\bar{u}$. Ten wyróżniony rodzaj ruchu układu sterowania spełnia równanie stanu

$$\dot{\bar{x}} = 0 = A\bar{x} + B\bar{u},\ \ \bar{x}(t_0) = \bar{x},\ \ t \in [t_0, +\infty).$$

Analizę warunków stabilności układów sterowania można sprowadzić do badania stabilności **zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania** określonego za pomocą przekształcenia

$$(\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}) \Rightarrow (x(t) = \tilde{x}(t) + \bar{x}).$$

Równanie stanu względem nowych współrzędnych stanu przybierze postać

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(\tilde{x}(t) + \bar{x}) + B\bar{u},$$

czyli

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t).$$

Rozwiązanie zerowe $\tilde{x}(t) = 0$ ostatniego równania jest równoważne z wyróżnionym rozwiązaniem niezerowym $\bar{x}$ równania pierwotnego. Rozwiązanie to jest punktem równowagi układu przekształconego, gdyż

$$A\tilde{x}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = 0.$$

Tak więc badanie stabilności dowolnej wyróżnionej trajektorii stanu liniowego stacjonarnego układu sterowania można sprowadzić do badania zerowego punktu równowagi zredukowanego układu sterowania z tą samą macierzą stanu A.

Definicja: Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem stabilnym, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ϵ można dobrać taką liczbę dodatnią $\eta = \eta(\epsilon)$, że trajektoria rozpoczynająca się w punkcie x_0, leżącym wewnątrz kuli o promieniu η, pozostanie wewnątrz kuli o promieniu ϵ dla dowolnej chwili $t > 0$.

Definicja: Punkt równowagi $x_r = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem asymptotycznie stabilnym, jeżeli punkt ten jest stabilny i ponadto $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Analizując stabilność liniowego stacjonarnego układu sterowania bierzemy pod uwagę składową swobodną rozwiązania pochodzącą od zaburzenia stanu początkowego

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_r + \delta x_0, \quad t \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}\delta x_0, \quad t \in [0, \infty).$$

Badanie stabilności asymptotycznej liniowych stacjonarnych układów sterowania sprowadza się do warunku zanikania składowej rozwiązania pochodzącej od zaburzenia stanu początkowego tj. do warunku

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\delta x_0 = 0$$

Rozważana składowa przybiera postać

$$e^{At}\delta x_0 = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}\delta x_0$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{(\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(s)\delta x_{j0}/\Delta(s))_{i=1,\ldots,n}\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{(X_1(s,\delta x_0),...X_i(s,\delta x_0),...,X_n(s,\delta x_0))^T\}\ \ (\star)$$

gdzie $\Delta_{ij}(s)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia $<= n$ jako element macierzy dołączonej $(sI - A)^D$, a $\Delta(s) = det(sI - A)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia n. Do badania wyrażenia $(\star)$ można zastosować metodę rozkładu na ułamki proste. W tym celu wyznaczamy **wartości własne** $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A tj. pierwiastki równania $det(sI - A) = 0$.

W zależności od charakteru tych wartości własnych uzyskujemy składowe rozwiązania o różnej postaci.

• 1. Wartości własne $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy A są jednokrotne rzeczywiste - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s - s_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s - s_2} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s - s_n},$$

gdzie $c_{ij}(\delta x_0)$ są stałymi zależnymi od zaburzenia warunku początkowego. W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)e^{s_1 t} + c_{i2}(\delta x_0)e^{s_2 t} + ... + c_{in}(\delta x_0)e^{s_n t}.$$

• 2. Wśród wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A jest r-krotna wartość własna rzeczywista - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s - s_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{(s - s_2)^2} + ... + \frac{c_{ir}(\delta x_0)}{(s - s_r)^r} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s - s_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)e^{s_1 t} + c_{i2}(\delta x_0)te^{s_2 t} + ... + c_{ir}(\delta x_0)t^{r-1}e^{s_r t} + ... + c_{in}(\delta x_0)e^{s_n t}.$$

• 3. Wśród wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A jest para wartości zespolonych sprzężonych $s_{1,2} = \sigma \pm \jmath\omega$ - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s - (\sigma + \jmath\omega)} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s - (\sigma - \jmath\omega)} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s - s_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = \tilde{c}_{i1}(\delta x_0)e^{\sigma t}cos\ \omega t + \tilde{c}_{i2}(\delta x_0)e^{\sigma t}sin\ \omega t + ... + c_{in}(\delta x_0)e^{s_n t}.$$

• 4. Wśród wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A jest para r-krotnych wartości zespolonych sprzężonych $s_{1,2} = \sigma \pm \jmath\omega$ - w tym przypadku

$$X_i(s,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{s - (\sigma + \jmath\omega)} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s - (\sigma - \jmath\omega)}$$

$$+ ... + \frac{c_{i1}(\delta x_0)}{(s-(\sigma+\jmath\omega))^r} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)}{(s-(\sigma-\jmath\omega))^r} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)}{s-s_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(t,\delta x_0) = \tilde{c}_{i1}(\delta x_0)e^{\sigma t} cos\ \omega t + \tilde{c}_{i2}(\delta x_0)e^{\sigma t} sin\ \omega t$$

$$+ ... + \tilde{c}_{i,2r-1}(\delta x_0)t^{r-1}e^{\sigma t} cos\ \omega t + \tilde{c}_{i2r}(\delta x_0)t^{r-1}e^{\sigma t} sin\ \omega t$$

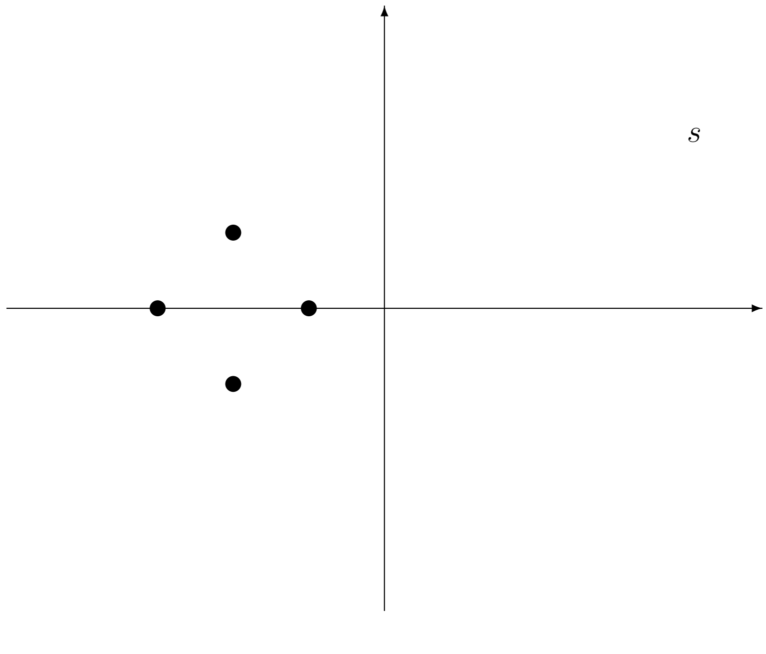
$$+ ... + c_{in}(\delta x_0)e^{s_n t}.$$

Biorąc pod uwagę zależność

$$\lim_{t\to\infty} t^p e^{\sigma t} = 0, \ \ p = 1,2,...;\ \sigma < 0,$$

wnioskujemy, że we wszystkich czterech przypadkach składowe swobodne rozwiązania równania stanu pochodzące od zaburzenia warunku początkowego zanikają wraz z upływem czasu $t \to \infty$.

Oznacza to, że warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności liniowych stacjonarnych układów sterowania jest położenie wszystkich wartości własnych $s_1, s_2, ..., s_n$ macierzy stanu A w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej tj. spełnienie warunku $Re(s_i) < 0$, $i = 1, ..., n$.



• **Definicja stabilności eksponencjalnej:** Punkt równowagi $x = 0$ zredukowanego układu sterowania nazywa się punktem stabilnym eksponencjalnie, jeżeli istnieją dwie liczby $\eta > 0$ i $\lambda < 0$ takie, że

$$||x(t)|| \leq \eta ||x(0)|| e^{\lambda t}.$$

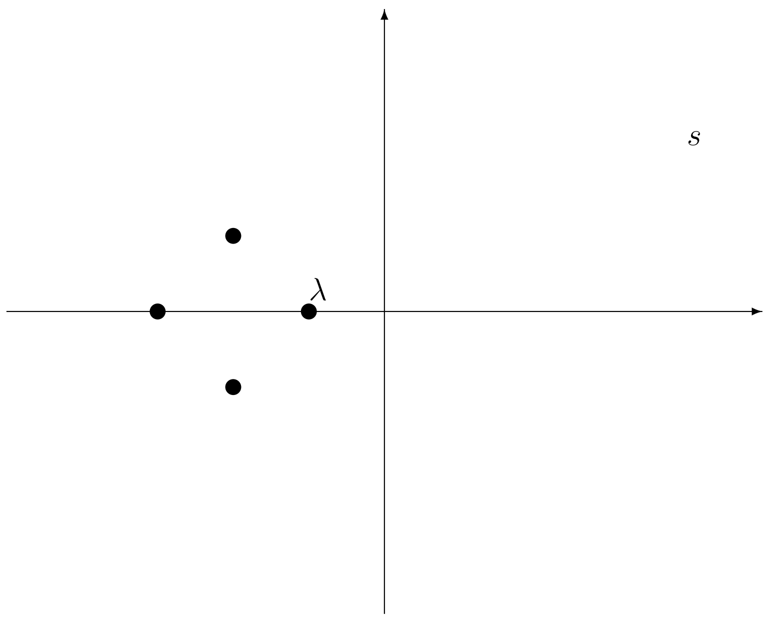
Dla stabilnego liniowego układu sterowania o pojedynczych wartościach własnych $s_i,\ i = 1, ..., n$ uzyskuje się

$$\lambda = \max_{i=1,...,n} Re(s_i)$$

tj. szybkość stabilności określona jest w tym przypadku przez maksymalną część rzeczywistą wartości własnych macierzy stanu. Jeśli natomiast układ posiada wielokrotne wartości własne, to zachodzi oszacowanie

$$\lambda = \max_{i=1,...,n} Re(s_i) + \epsilon,$$

gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią - tak więc również w tym przypadu wykładnik szybkości stabilności jest w przybliżeniu równy maksymalnej części rzeczywistej wartości własnych macierzy stanu.



W przypadku zamkniętego układu sterowania

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t), \quad \tilde{A} = A + BKC$$

badanie stabilności asymptotycznej sprowadza się do weryfikacji położenia wartości własnych macierzy stanu $\tilde{A}$ zamkniętego układu sterowania.

Ponieważ wartości własne macierzy A (lub $\tilde{A}$) są pierwiastkami równania algebraicznego stopnia n, więc zbadać ich położenie na płaszczyźnie s można stosując kryterium Hurwitza. W tym celu

• (a) porządkujemy równanie wartości własnych do postaci

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0,$$

• (b) sprawdzamy, czy wszystkie współczynniki a_i są różne od zera i mają ten sam znak,

• (c) sprawdzamy, czy wszystkie minory główne Δ_i macierzy Hurwitza $\mathcal{H}$ są dodatnie, gdzie

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Inna postać macierzy Hurwitza

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0... & \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0... & \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & 0 & 0... & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}_{n\times n}$$

• Przykład:

Macierz stanu zredukowanego układu sterowania z czasem ciągłym ma postać

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{pmatrix},$$

przy czym α i β są parametrami układu. Aby zbadać dla jakich parametrów układ sterowania jest asymptotycznie stabilny zapisujemy równanie wartości własnych macierzy stanu

$$det(sI - A) = det \begin{pmatrix} s+1 & -\alpha & 0 \\ \beta & s+1 & -\alpha \\ 0 & -\beta & s+1 \end{pmatrix} = 0.$$

Określamy następnie wielomian charakterystyczny układu w postaci standardowej

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + (3 - 2\alpha\beta)s + 1 - 2\alpha\beta = 0 \Rightarrow 1 - 2\alpha\beta > 0,$$

co oznacza, że $a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = 3 - 2\alpha\beta$ i $a_0 = 1 - 2\alpha\beta$.

Zapisujemy macierz Hurwitza

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 2\alpha\beta & 1 - 2\alpha\beta & 0 \\ 1 & 3 & 3 - 2\alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kryterium stabilności Hurwitza implikuje warunki

• $a_1 = 3 - 2\alpha\beta > 0$ i $a_0 = 1 - 2\alpha\beta > 0$ (dodatniość współczynników wielomianu charakterystycznego układu),

• $\Delta_1 = 3 - 2\alpha\beta > 0$, i $\Delta_2 = 8 - 4\alpha\beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta < 0.5$ (dodatniość minorów głównych macierzy Hurwitza).

Tak więc obszar stabilności parametrycznej układu sterowania jest określony przez nierówność

$$\alpha\beta < 0.5.$$

Stabilność liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym

Badanie stabilności asymptotycznej liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym sprowadza się do warunku zanikania składowej rozwiązania pochodzącej od zaburzenia stanu początkowego tj. do warunku

$$\lim_{k\to\infty} A^k \delta x_0 = 0$$

Rozważana składowa przybiera postać

$$A^k\delta x_0 = \mathcal{Z}^{-1}\{(zI-A)^{-1}z\}\delta x_0$$
$$= \mathcal{Z}^{-1}\{(\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}(z)z\delta x_{j0}/\Delta(z))_{i=1,\ldots,n}\} =$$
$$\mathcal{Z}^{-1}\{(X_1(z,\delta x_0),...X_i(z,\delta x_0),...,X_n(z,\delta x_0))^T\} \quad (\star)$$

gdzie $\Delta_{ij}(z)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia $<= n$ jako element macierzy dołączonej $(zI-A)^D$, a $\Delta(z) = det(zI-A)$ jest wielomianem zmiennej zespolonej z stopnia n. Do badania wyrażenia $(\star)$ można zastosować metodę rozkładu na ułamki proste. W tym celu wyznaczamy **wartości własne** $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A układu dyskretnego tj. pierwiastki równania $det(zI-A) = 0$.

W zależności od charakteru tych wartości własnych uzyskujemy składowe rozwiązania o różnej postaci.

• 1. Wartości własne $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy A są jednokrotne rzeczywiste - wtedy

$$X_i(z,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)z}{z-z_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)z}{z-z_2} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)z}{z-z_n},$$

gdzie $c_{ij}(\delta x_0$ są stałymi zależnymi od zaburzenia warunku początkowego. W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k,\delta x_0) = c_{i1}(\delta x_0)z_1^k + c_{i2}(\delta x_0)z_2^k + ... + c_{in}(\delta x_0)z_n^k.$$

• 2. Wśród wartości własnych $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A jest r-krotna wartość własna rzeczywista - wtedy

$$X_i(z,\delta x_0) = \frac{c_{i1}(\delta x_0)z}{z-z_1} + \frac{c_{i2}(\delta x_0)z}{(z-z_2)^2} + ... + \frac{c_{ir}(\delta x_0)z}{(z-z_r)^r} + ... + \frac{c_{in}(\delta x_0)z}{z-z_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k,\delta x_0)=c_{i1}(\delta x_0)z_1^k+c_{i2}(\delta x_0)kz_1^k+...+c_{ir}(\delta x_0)k^{r-1}z_1^k+...+c_{in}(\delta x_0)z_n^k.$$

- 3. Wśród wartości własnych $z_1,z_2,...,z_n$ macierzy stanu A jest para wartości zespolonych sprzężonych $z_{1,2}=\sigma e^{\pm\jmath\omega}$ - wtedy

$$X_i(z,\delta x_0)=\frac{c_{i1}(\delta x_0)z}{z-\sigma e^{\jmath\omega}}+\frac{c_{i2}(\delta x_0)}{s-\sigma e^{-\jmath\omega}}+...+\frac{c_{in}(\delta x_0)z}{z-z_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

$$x_i(k,\delta x_0)=\tilde{c}_{i1}(\delta x_0)\sigma^k cos\ \omega k+\tilde{c}_{i2}(\delta x_0)\sigma^k sin\ \omega k+...+c_{in}(\delta x_0)z_n^k.$$

- 4. Wśród wartości własnych $z_1,z_2,...,z_n$ macierzy stanu A jest para r-krotnych wartości zespolonych sprzężonych $z_{1,2}=\sigma e^{\pm\jmath\omega}$ - wtedy

$$X_i(z,\delta x_0)=\frac{c_{i1}(\delta x_0)}{z-\sigma e^{\jmath\omega}}+\frac{c_{i2}(\delta x_0)}{z-\sigma e^{-\jmath\omega}}+...$$

$$+\frac{c_{i1}(\delta x_0)}{(z-\sigma e^{\jmath\omega})^r}+\frac{c_{i2}(\delta x_0)}{(z-\sigma e^{-\jmath\omega})^r}+...+\frac{c_{in}(\delta x_0)}{z-z_n}.$$

W dziedzinie czasowej uzyskujemy

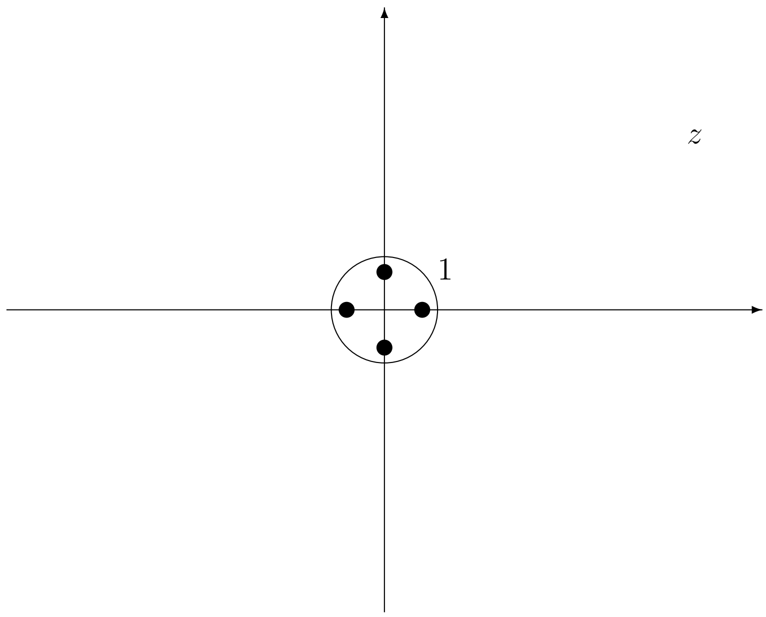
$$x_i(k,\delta x_0)=\tilde{c}_{i1}(\delta x_0)\sigma^k cos\ \omega k+\tilde{c}_{i2}(\delta x_0)\sigma^k sin\ \omega k+...$$

$$+\tilde{c}_{i,2r-1}(\delta x_0)k^{r-1}\sigma^k cos\ \omega k+\tilde{c}_{i2r}(\delta x_0)k^{r-1}\sigma^k sin\ \omega k+...+c_{in}(\delta x_0)z_n^k.$$

Biorąc pod uwagę zależność

$$\lim_{k\to\infty} k^p z^k = 0, \quad p = 1, 2, ...; |z| < 1,$$

wnioskujemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym jest położenie wszystkich wartości własnych $z_1, z_2, ..., z_n$ macierzy stanu A układu dyskretnego wewnątrz okęgu jednostkowego płaszczyzny zmiennej zespolonej z tj. spełnienie warunku $|z_i| < 1, \quad i = 1, ..., n$.



Lemat: Transformacja $z = (s+1)/(s-1), \; s \neq 1$ przeprowadza koło jednostkowe płaszczyzny z w lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej s.

Dowód: Oznaczmy $s = a + \jmath\, b$. Z zależności

$$|z| = |(a + \jmath\, b + 1)/(a + \jmath\, b - 1)| < 1$$

wynika, że

$$\big((a+1)^2 + b^2 < (a-1)^2 + b^2\big)$$
$$\Rightarrow (2a < -2a) \Rightarrow (4a < 0) \Rightarrow (a = Re(s) < 0).$$

Tak więc podstawiając $z = (s+1)/(s-1)$ do równania $det(zI - A) = 0$ sprowadzamy badanie stabilności dyskretnych układów sterowania do kryterium Hurwitza.

Przykład: Macierz stanu zredukowanego układu sterowania z czasem dyskretnym ma postać

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ \beta^2 & -\alpha \end{pmatrix},$$

przy czym α i β są parametrami układu. Aby zbadać dla jakich parametrów układ sterowania z czasem dyskretnym jest asymptotycznie stabilny zapisujemy równanie wartości własnych macierzy stanu

$$det(zI - A) = det \begin{pmatrix} z+\alpha & 1 \\ -\beta^2 & z+\alpha \end{pmatrix} = 0.$$

Określamy następnie wielomian charakterystyczny układu w postaci standardowej

$$\Delta(z) = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Dokonujemy podstawienia $z = (s+1)/(s-1)$ uzyskując

$$(\frac{s+1}{s-1})^2 + 2\alpha\frac{s+1}{s-1} + \alpha^2 + \beta^2 = 0/\cdot(s-1)^2.$$

Określamy następnie wielomian charakterystyczny układu względem zmiennej s:

$$\big(1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2\big)s^2 + (2 - 2(\alpha^2 + \beta^2))s + 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

co oznacza, że $a_2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2$, $a_1 = 2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)$ i $a_0 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2$.

Ponieważ $a_2 = (1+\alpha)^2 + \beta^2$ i $a_0 = (1-\alpha)^2 + \beta^2$, więc kryterium stabilności Hurwitza określa obszar stabilności parametrycznej jako wnętrze koła

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1.$$

Stabilność dyskretnych liniowych układów sterowania w układzie zamkniętym sprowadza się do badania, czy wartości własne macierzy stanu zamkniętego układu dyskretnego

$$\tilde{A} = A + BKC$$

leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie z.

Zanikanie składowej swobodnej rozwiązania równania stanu liniowego dyskretnego układu sterowania

$$\lim_{k\to\infty} A^k \delta x_0 = 0$$

dla dowolnego zaburzenia stanu początkowego implikuje zbieżność do zera elementów macierzy A^k.

Praktyczne kryterium badania stabilności dyskretnych układów sterowania uzyskujemy obliczając potęgi macierzy stanu układu dyskretnego podnosząc je do kwadratu.

$$A,\ A^2 = AA,\ A^4 = A^2A^2,\ A^8 = A^4A^4,\ A^{16} = A^8A^8...$$

Jeśli elementy potęgowanych macierzy dążą do zera, to układ dyskretny jest asymptotycznie stabilny. Metoda ta nazywana jest **metodą szybkiego potęgowania macierzy**. Wyznacza ona ciąg macierzy

$$A,\ A^2,\ A^4,\ A^8, ..., A^{2^k}.$$

Oznaczmy elementy ostatniej macierzy jako $(a_{ij})_{2^k}$.

Warunek stopu metody szybkiego potęgowania macierzy dla badania stabilności liniowych dyskretnych układów sterowania przybiera postać

$$|(a_{ij})_{2^k}| < \frac{1}{n},\ \ i,j = 1,2,...,n,$$

gdzie n jest wymiarem kwadratowej macierzy stanu A.

Jeśli warunek stopu jest spełniony, to elementy macierzy A^{2^k} spełniają warunki

$$|(a_{ij})_{2^k}| \le \frac{(c_{ij})_{2^k}}{n},\ \ i,j = 1,2,...,n$$

dla stałych $(c_{ij})_{2^k} < 1$. Spełniają one więc warunek

$$|(a_{ij})_{2^k}| \le \frac{(c)_{2^k}}{n},\ \ i,j = 1,2,...,n$$

dla stałej $(c)_{2^k} = \max_{ij}(c_{ij})_{2^k} < 1$. Elementy macierzy $A^{2^{k+1}}$ spełniają oszacowania

$$|(a_{ij})_{2^{k+1}}| \le n\frac{(c)_{2^k}}{n}\frac{(c)_{2^k}}{n} = \frac{(c)_{2^{k+1}}}{n},$$

gdzie $(c)_{2^{k+1}} = (c)_{2^k}(c)_{2^k} < (c)_{2^k} < 1$. Oszacowania te dążą monotonicznie do zera dla $k \to \infty$.

Przykład: Niech jednorodne równanie stanu liniowego dyskretnego układu sterowania ma postać

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x(k)$$

Warunek stopu metody szybkiego potęgowania macierzy ma w tym przypadku postać

$$|(a_{ij})_{2^k}| < \frac{1}{3}, \quad i,j = 1,2,3; \quad (n = 3).$$

Elementy macierzy A $(k = 0)$ nie spełniają warunku stopu metody szybkiego potęgowania macierzy, gdyż $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Obliczamy

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dla $k = 1$ warunek stopu metody szybkiego potęgowania macierzy jest spełniony. Oznacza to, że rozpatrywany liniowy dyskretny układ sterowania jest asymptotycznie stabilny.

Stabilność liniowych okresowych układów sterowania

Dla niektórych układów sterowania charakterystyczna jest okresowa (cykliczna) zmienność jego parametrów. Wyróżnioną trajektorią stanu może być w tym przypadku krzywa zamknięta zwana także cyklem granicznym. Jednorodny liniowy okresowy układ sterowania opisywany jest równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

gdzie niestacjonarna macierz stanu $A(t)$ jest macierzą okresową tj.

$$A(t+\tau) = A(t).$$

Lemat: Znormalizowana macierz fundamentalna $\Phi(t) = \Phi(t,0)$ liniowego okresowego układu sterowania posiada reprezentację

$$\Phi(t) = \Gamma(t)e^{\Lambda t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

gdzie $\Gamma(t)$ jest nieosobliwą macierzą okresową, zaś Λ jest macierzą stałą.

Dowód: Macierz $\Phi(t)$ spełnia z definicji równanie

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że każda macierz fundamentalna $\tilde{\Phi}(t)$ może być uzyskana ze znormalizowanej macierzy fundamentalnej $\Phi(t)$ za pomocą nieosobliwego przekształcenia liniowego C tj. $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)C$. Ponieważ dla układu okresowego $\Phi(t+\tau)$ jest jego macierzą fundamentalną

$$\frac{d\Phi(t+\tau)}{dt} = \Phi'(t+\tau)\frac{d(t+\tau)}{dt} = A(t+\tau)\Phi(t+\tau) = A(t)\Phi(t+\tau),$$

więc $\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C$ i $\Phi(\tau) = C$ $(t=0)$. Oznacza to, że $\Phi(t+\tau) = \Phi(t)\Phi(\tau)$.

Z teorii macierzy wiadomo, że każda macierz nieosobliwa posiada tzw. reprezentację logarytmiczną tj.

$$\Phi(\tau) = e^{\Lambda\tau}$$

.

Jeśli macierz $\Phi(\tau)$ posiada jednokrotne wartości własne $s_1, s_2, ..., s_n$, to reprezentację taką można łatwo uzyskać stosując nieosobliwe przekształcenie diagonalizujące P:

$$P^{-1}\Phi(\tau)P = \underset{1\leq i\leq n}{diag}(s_i).$$

Macierz P jest określona przez wektory własne $P_i,\ i = 1, ..., n$ macierzy $\Phi(\tau)$ związane z poszczególnymi wartościami własnymi. Wektory te spełniają równania

$$\Phi(\tau)P_i = s_i P_i, \quad i = 1, ..., n$$

i mogą być wyznaczone przez rozwiązanie tych równań. Ponieważ

$$det(s_i I - \Phi(\tau)) = 0,$$

więc jedną współrzędną wektora P_i zakładamy jako dowolną wartość niezerową, a pozostałe współrzędne tego wektora obliczamy z układu $n-1$ równań liniowo niezależnych. Wartości własne s_i przedstawiamy w postaci wykładniczej

$$s_i = e^{\lambda_i \tau}, \quad \lambda_i = \frac{1}{\tau}(ln|s_i| + \jmath(arg(s_i) + 2k\pi).$$

i uzyskujemy zależności

$$\Phi(\tau) = P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(s_i)\ P^{-1} = P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(e^{\lambda_i\tau})\ P^{-1}$$

$$= P\ (I + \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i\tau) + \underset{1\leq i\leq n}{diag}((\lambda_i\tau)^2/2!) + ...)\ P^{-1}$$

$$= I + P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i\tau)\ P^{-1} + \frac{1}{2!}P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i\tau)\ P^{-1}P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i\tau)\ P^{-1} + ...$$

$$= e^{P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i\tau)\ P^{-1}} = e^{P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i)\ P^{-1}\tau} = e^{\Lambda\tau}, \ \Lambda = P \underset{1\leq i\leq n}{diag}(\lambda_i)\ P^{-1}$$

Z zależności

$$\Phi(t) = \Phi(t)e^{-\Lambda t}e^{\Lambda t} = \Gamma(t)e^{\Lambda t}, \quad \Gamma(t) = \Phi(t)e^{-\Lambda t},$$

$$\Gamma(t+\tau) = \Phi(t+\tau)e^{-\Lambda(t+\tau)} = \Phi(t)\Phi(\tau)e^{-\Lambda\tau}e^{-\Lambda t} = \Phi(t)e^{-\Lambda t} = \Gamma(t)$$

wynika,że macierz $\Gamma(t)$ jest macierzą τ-okresową. Elementy tej macierzy są jednostajnie ograniczone na osi czasu jako ciągłe funkcje okresowe.

Definicja: Macierz fundamentalna $\Phi(\tau)$ liniowego układu okresowego nazywa się macierzą monodromii, a jej wartości własne nazywają się mnożnikami Floqueta lub multyplikatorami tego układu.

Twierdzenie: Liniowy okresowy układ sterowania jest stabilny (stabilny asymptotycznie) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie multyplikatory (wartości własne **macierzy monodromii** $\Phi(\tau)$) tego układu leżą w domkniętym kole jednostkowym $|s_i| \leq 1,\ i = 1, ..., n$ (leżą wewnątrz koła jednostkowego $|s_i| < 1,\ i = 1, ..., n$).

Dowód: Składowa rozwiązania liniowego układu okresowego pochodząca od zaburzenia warunku początkowego ma postać

$$x(t) = \Gamma(t)e^{\Lambda t}\delta x_0.$$

Ze względu na jednostajną ograniczoność macierzy $\Gamma(t)$ na osi czasu zachodzi oszacowanie

$$||x(t)|| \leq c||e^{\Lambda t}||.$$

Oznacza to, że badany układ jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne λ_i macierzy Λ leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Warunek ten jest jednak równoważny z położeniem wartości własnych macierzy $\Phi(\tau)$ wewnątrz koła jednostkowego z uwagi na związek

$$s_i = e^{\lambda_i \tau}.$$

Przykład: Niech macierz $A(t)$ będzie określona jak następuje:

$$A(t)_{t\in[0,\pi)} = \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A(t)_{t\in[\pi,2\pi)} = \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Mamy więc

$$\Phi(t) = e^{\bar{A}t}\begin{pmatrix} cos\ t & sin\ t \\ -sin\ t & cos\ t \end{pmatrix}, \Phi(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} -e^{a_1\pi} & 0 \\ 0 & -e^{a_2\pi} \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $s_i = -e^{a_i\pi}$ i warunek stabilności układu okresowego przybiera postać $a_i < 0,\ i = 1, 2.$.

Stabilność układów zlinearyzowanych

Warunki stabilności liniowych układów sterowania można stosować do badania stabilności układów nieliniowych w małym otoczeniu wyróżnionej trajektorii stanu. Takimi wyróżnionymi trajektoriami stanu mogą być m.in. trajektorie stałe (np. optymalny statyczny punkt pracy układu) lub trajektorie okresowe (np. optymalna cykliczna trajektoria układu). Założenie o funkcjonowaniu procesu w małym otoczeniu wymienionych trajektorii pozwala uprościć model matematyczny układu rozwijając nieliniowe funkcje w szereg Taylora pierwszego rzędu i przejść do modelu zlinearyzowanego względem zmiennych przyrostowych czyli małych odchyleń od trajektorii wyróżnionej.

Niech $\delta x(t), \delta u(t)$ i $\bar{y}$ będą małymi odchyleniami stanu,sterowania i wyjścia od statycznego punktu pracy $\bar{x}, \bar{u}$ i$\bar{y}$ układu. Nieliniowy opis układu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

linearyzujemy w punkcie pracy $(\bar{x}, \bar{u})$

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}+\delta x(t)) = f(\bar{x}, \bar{u})+\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}\delta u(t)+r_f(\delta x(t), \delta u(t)),$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}\delta u(t) + r_g(\delta x(t), \delta u(t)),$$

gdzie $r_f(\delta x(t), \delta u(t))$ i $r_g(\delta x(t), \delta u(t))$ są nieliniowymi członami rozwinięć (resztami z rozwinięcia w szereg Taylora w szereg pierwszego rzędu) spełniającymi warunki

$$\lim_{||\delta x|| \to 0} \frac{r_f(\delta x(t), \delta u(t))}{||\delta x||} = 0, \quad \lim_{||\delta u|| \to 0} \frac{r_f(\delta x(t), \delta u(t))}{||\delta u||} = 0.$$

Reszty te są nieskończenie małymi rzędu wyższego niż odpowiednio $||\delta x||$ i $||\delta u||$. Można je pominąć dla małych odchyleń od punktu pracy i przejść do modelu zlinearyzowanego

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}\delta u(t),$$

$$\delta y(t) = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}\delta u(t).$$

Podstawą do badania stabilności układu zlinearyzowanego jest weryfikacja położenia wartości własnych macierzy Jacobiego

$$A = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} = \big(\frac{\partial f_i(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_j}\big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

W przypadku wyróżnionego cyklicznego sposobu prowadzenia procesu macierz stanu układu zlinearyzowanego przybiera niestacjonarną postać okresową

$$A(t) = \frac{\partial f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} = \big(\frac{\partial f_i(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}{\partial x_j}\big)_{i,j=1,\ldots,n},$$

gdzie $\tilde{x}(t)$ jest cykliczną trajektorią stanu, a $\tilde{u}(t)$ jest cyklicznym sterowaniem.