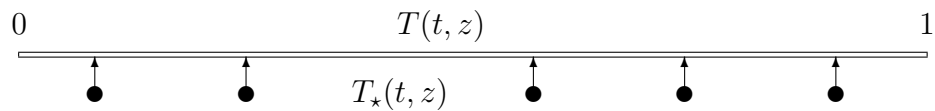


Procesy sterowania o parametrach rozłożonych

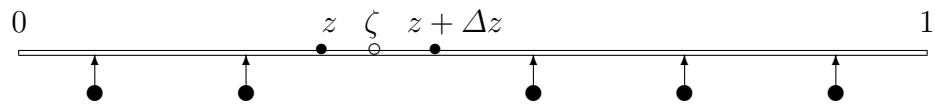
Przykład: Sterowanie procesem nagrzewania pręta metalowego. Obiektem sterowania jest pręt metalowy z izolowanymi końcami.



Temperatura pręta zależy zarówno od czasu $t \in [t_0, t_1]$ jak i od zmiennej przestrzennej $z \in [0, 1]$. Temperatura ta może być kształtowana za pomocą układu źródeł ciepła rozłożonych wzdłuż jego długości. Tak więc wielkościami fizycznymi związanymi z procesem nagrzewania pręta są:

- $T(t, z)$ - temperatura pręta w chwili t i w punkcie z ,
- $T_*(t, z)$ - temperatura nagrzewania pręta w chwili t i w punkcie z .

Celem uzyskania zależności wiążącej te wielkości stosujemy metodę małego elementu.



Wyróżniamy mały element pręta $[z, z + \Delta z]$ o długości Δz . Niech $\zeta \in [z, z + \Delta z]$ będzie punktem wewnętrznym elementu. Równanie dynamiki aproksymujemy metodą bilansu ciepła dla małego elementu $[z, z + \Delta z]$ pręta:

$$\underbrace{a \frac{\partial T(t, \zeta)}{\partial t} \Delta z}_{\sigma_1} \approx b \left(\underbrace{\frac{\partial T(t, z + \Delta z)}{\partial z}}_{\sigma_2} - \underbrace{\frac{\partial T(t, z)}{\partial z}}_{\sigma_2} \right) - \underbrace{cT(t, \zeta) \Delta z}_{\sigma_3} + \underbrace{dT_*(t, \zeta) \Delta z}_{\sigma_4}$$

gdzie

σ_1 - szybkość zmiany w czasie ilości ciepła w małym elemencie pręta,

σ_2 - ilość ciepła przechodzącego przez granice małego elementu (strumień ciepła przepływa od punktu o temperaturze wyższej do punktu o temperaturze niższej i jest proporcjonalny do pochodnej temperatury względem zmiennej przestrzennej),

σ_3 - ilość ciepła odprowadzanego do otoczenia w punkcie ζ w rezultacie stygnięcia pręta,

σ_4 - ilość ciepła doprowadzanego z otoczenia w punkcie ζ w rezultacie nagrzewania pręta,

przy czym a jest współczynnikiem pojemności cieplnej pręta, b jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, zaś c i d są współczynnikami wymiany ciepła.

Dzieląc ostatnie równanie przez $a\Delta z$ i przechodząc do zera z długością małego elementu $\Delta z \rightarrow 0$ uzyskujemy równanie dynamiki procesu nagrzewania pręta w postaci równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (równanie przewodnictwa cieplnego)

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2} - \beta T(t, z) + \gamma T_*(t, z),$$

$(t, z) \in [t_0, t_1] \times [0, 1]$, a $T(0, z) = T_0(z)$, $z \in [0, 1]$ jest warunkiem początkowym w postaci początkowego rozkładu temperatury, zaś $T(t, 0) = 0$, $T(t, 1) = 0$,

$t \in [t_0, t_1]$ są zerowymi warunkami brzegowymi odzwierciedlającymi brak wymiany ciepła z otoczeniem na izolowanych końcach pręta, natomiast $\alpha \doteq b/a$, $\beta \doteq c/a$ i $\gamma \doteq d/a$ są parametrami procesu.

Cel sterowania można określić w tym przypadku jako minimalizację odchylenia końcowego profilu temperatury pręta od profilu zadanego z uwzględnieniem kosztów sterowania

$$\int_0^1 (T(t_1, z) - T_1(z))^2 ds + \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 T_*^2(t, z) dz dt,$$

gdzie $T_1(z)$ jest pożądanym końcowym profilem temperatury pręta, a ρ jest współczynnikiem kosztów nagrzewania pręta.

Wprowadzamy standaryzację oznaczeń zmiennych procesowych i ich pochodnych:

$x(t, z) = T(t, z)$ - zmienna stanu o parametrach rozłożonych (stan rozłożony),

$w(t, z) = T_*(t, z)$ - zmienna sterująca o parametrach rozłożonych (sterowanie rozłożone),

$x_t(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu rozłożonego względem zmiennej czasowej,

$x_{zz}(t, z)$ - druga pochodna cząstkowa stanu rozłożonego względem zmiennej przestrzennej.

Równania stanu procesu nagrzewania pręta w zapisie standardowym przybierają postać

$$x_t(t, z) = \alpha x_{zz}(t, z) - \beta x(t, z) + \gamma w(t, z),$$

$$t \in [t_0, t_1] \times [0, 1],$$

z warunkami granicznymi tj. z warunkiem początkowym i z warunkami brzegowymi

$$x(0, z) = x_0(z), \quad z \in [0, 1],$$

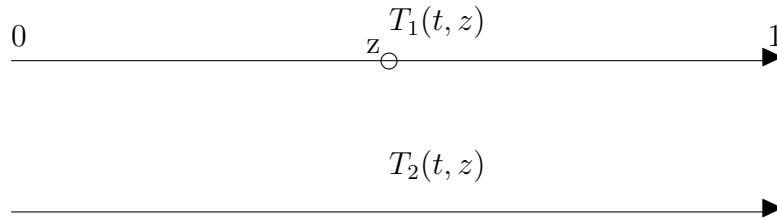
$$x(t, 0) = 0, \quad x(t, 1) = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Cel sterowania w zapisie standardowym przybiera postać

$$\int_0^1 (x(t_1, z) - x_1(z))^2 ds + \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 w^2(t, z) dz dt,$$

gdzie $x_1(z) \doteq T_1(z)$ jest pożądanym końcowym profilem temperatury pręta.

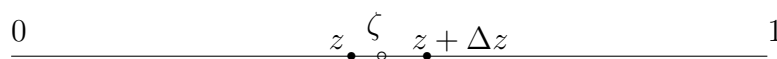
**Sterowanie procesem wymiany ciepła
w rurowym wymienniku ciepła**



Współbieżny proces wymiany ciepła realizowany jest np. w wymienniku ciepła typu "rura w rurze". Wyróżniamy wielkości fizyczne związane z procesem wymiany ciepła:

- $T_1(t, z)$ - temperatura strumienia zimnego w chwili t w punkcie z ,
- $T_2(t, z)$ - temperatura strumienia ciepłego w chwili t w punkcie z ,
- $q_i(t)$ - natężenie przepływu i -tego strumienia w chwili t ($i = 1, 2$),
- $T(t)$ - temperatura czynnika grzejnego na wejściu strumienia ciepłego.

Wyróżniamy mały element przestrzenny wymiennika $[z, z + \Delta z]$.



Niech $\zeta \in (z, z + \Delta z)$. Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu ciepła w małym elemencie $[z, z + \Delta z]$ wymiennika dla strumienia zimnego

$$\underbrace{\frac{\partial T_1(t, \zeta)}{\partial t} \Delta z}_{\sigma_{11}} \approx \underbrace{q_1(t)(T_1(t, z) - T_1(t, z + \Delta z))}_{\sigma_{12}} + a_1 \underbrace{(T_2(t, \zeta) - T_1(t, \zeta)) \Delta z}_{\sigma_{13}},$$

i dla strumienia ciepłego

$$\underbrace{\frac{\partial T_2(t, \zeta)}{\partial t} \Delta z}_{\sigma_{21}} \approx \underbrace{q_2(t)(T_2(t, z) - T_2(t, z + \Delta z))}_{\sigma_{22}} + a_2 \underbrace{(T_1(t, \zeta) - T_2(t, \zeta)) \Delta z}_{\sigma_{23}},$$

gdzie

σ_{i1} - szybkość zmiany w czasie ilości ciepła i -tego strumienia w małym elemencie wymiennika,

σ_{i2} - ilość ciepła wprowadzanego do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanego z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$ w rezultacie wymuszonego przepływu tłokowego,

σ_{i3} - ilość ciepła wymiany między strumieniami w małym elemencie wymiennika,

a_i - współczynniki wymiany ciepła dla i -tego strumienia.

Dzieląc przybliżone równania bilansu ciepła przez Δz i przechodząc do granicy $\Delta z \rightarrow 0$ uzyskujemy równania dynamiki wymiennika ciepła

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(t, z)}{\partial t} &= -q_1(t) \frac{\partial T_1(t, z)}{\partial z} + a_1(T_2(t, z) - T_1(t, z)), \\ \frac{\partial T_2(t, z)}{\partial t} &= -q_2(t) \frac{\partial T_2(t, z)}{\partial z} + a_2(T_1(t, z) - T_2(t, z)), \end{aligned}$$

gdzie $(t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1]$. Warunki początkowe sprowadzają się do określenia początkowego rozkładu temperatury dla każdego strumienia

$$T_i(0, z) = T_i(z), \quad z \in [0, 1],$$

zaś warunki brzegowe przybierają postać

$$T_1(t, 0) = T_-, \quad T_2(t, 0) = T_+ > T_-, \quad t \in [0, \tau].$$

Cel sterowania można określić w tym przypadku jako maksymalizację sumarycznej ilości ciepła uzyskiwanej na wyjściu strumienia zimnego

$$\int_0^\tau T_1(t, 1) dt.$$

Wprowadzamy standaryzację oznaczeń zmiennych procesowych i ich pochodnych:

$x_i(t, z) = T_i(t, z)$ - zmienne stanu procesu o parametrach rozłożonych,

$v_i(t) = q_i(t)$ - sterowania przepływowe procesu o parametrach rozłożonych,

$x_{it}(t, z)$ - pochodna cząstkowa i -tej zmiennej stanu rozłożonego względem zmiennej czasowej,

$x_{iz}(t, z)$ - pochodna cząstkowa i -tej zmiennej stanu rozłożonego względem zmiennej przestrzennej.

Równania stanu procesu wymiany ciepła w zapisie standardowym przybierają postać:

$$x_{1t}(t, z) = -v_1(t)x_{1z}(t, z) + a_1(x_2(t, z) - x_1(t, z)),$$

$$x_{2t}(t, z) = -v_2(t)x_{2z}(t, z) + a_2(x_1(t, z) - x_2(t, z)),$$

$$(t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1],$$

z warunkami początkowymi dla strumienia zimnego i ciepłego

$$x_1(0, z) = x_{10}(z), \quad x_2(0, z) = x_{20}(z), \quad z \in [0, 1]$$

oraz z warunkami brzegowymi dla strumienia zimnego i ciepłego

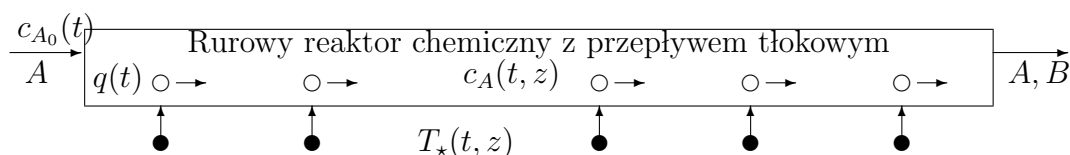
$$x_1(t, 0) = x_{1-}, \quad x_2(t, 0) = x_{2+}, \quad t \in [0, \tau].$$

Cel sterowania w zapisie standardowym przybiera postać

$$\int_0^\tau x_1(t, 1) dt.$$

Sterowanie chemicznym procesem produkcyjnym w reaktorze rurowym

Niech chemiczny proces produkcyjny polega na przemianie substratu A w produkt użyteczny B w rurowym reaktorze chemicznym z przepływem tłokowym.

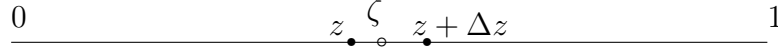


W reaktorze rurowym zachodzi proces przemiany substancji surowcowej (substratu) A w produkt użyteczny B . W związku z rozłożonym charakterem obiektu sterowania wyróżniamy zmienną czasową $t \in [0, \tau]$ i zmienną przestrzenną $z \in [0, 1]$. Zmienne procesowe są funkcjami zmiennej czasowej i przestrzennej:

- $c_A(t, z)$ - stężenie substancji surowcowej A w chwili t w punkcie z reaktora rurowego,
- $T_*(t, z)$ - intensywność źródła ciepła w chwili t w punkcie z reaktora,
- $c_{A_0}(t)$ - stężenie substancji surowcowej A w strumieniu wejściowym reaktora w chwili t ,
- $q(t)$ - natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor w chwili t .

Opis dynamiki rozważanego procesu z przepływem tłokowym można uzyskać metodą bilansu masy dla małego elementu obiektu sterowania.

Wyróżniamy mały element reaktora $[z, z + \Delta z]$.



Niech $\zeta \in (z, z + \Delta z)$. Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu masy dla małego elementu $[z, z + \Delta z]$ reaktora:

$$a \underbrace{\frac{\partial c_A(t, \zeta)}{\partial t}}_{\sigma_1} \Delta z \approx \underbrace{aq(t)(c_A(t, z) - c_A(t, z + \Delta z))}_{\sigma_2} - \underbrace{f(x(t, \zeta), T_*(t, \zeta)) \Delta z}_{\sigma_3},$$

gdzie

σ_1 - szybkość zmiany w czasie ilości substancji A w małym elemencie reaktora,

σ_2 - ilość substancji A wprowadzanej do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$,

σ_3 - ilość substancji A ulegającej przemianie w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora,

a - współczynnik przekroju reaktora rurowego,

$f(c_A(t, \zeta), T_*(t, \zeta)) \doteq \varkappa e^{-\beta/T_*(t, \zeta)} c_A^p(t, \zeta)$ - funkcja szybkości przemiany surowca A w produkt użyteczny B,

\varkappa, β - współczynniki prawa Arrheniusa określającego wpływ temperatury na szybkość reakcji,

p - rząd reakcji przemiany $A \rightarrow B$.

W modelu aproksymującym uwzględniono nieliniową zależność szybkości reakcji od stężenia substratu A (np. dla $p = 2$ jest to zależność kwadratowa) i od temperatury (jest to nieliniowa i niewypukła zależność określona prawem Arrheniusa).

Dzieląc równanie aproksymujące przez $a\Delta z$ uzyskujemy

$$\frac{\partial c_A(t, \zeta)}{\partial t} \approx -q(t) \frac{c_A(t, z + \Delta z) - c_A(t, z)}{\Delta z} - \varkappa e^{-\beta/T_*(t, \zeta)} x^p(t, \zeta),$$

Przejdźcie graniczne $\Delta z \rightarrow 0$ tj. $\zeta \rightarrow z$ pozwala określić równanie stanu

procesu w postaci równania bilansu masy procesu z przepływem tłokowym

$$\frac{\partial c_A(t, z)}{\partial t} = -q(t) \frac{\partial c_A(t, z)}{\partial z} \Delta z - \kappa e^{-\beta/T_*(t, z)} c_A^p(t, z),$$

$$(t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1].$$

Równanie to uzupełniamy warunkiem początkowym w postaci początkowego rozkładu substratu wzdłuż reaktora

$$c_A(0, z) = c_A(z), \quad z \in [0, 1]$$

oraz warunkiem brzegowym w postaci oddziaływania stężenia wejściowego substratu na proces

$$c_A(t, 0) = c_{A_0}(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Równanie dynamiki procesu jest w tym przypadku równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

Cel sterowania chemicznym procesem produkcyjnym z przepływem tłokowym można określić jako maksymalizację produkcji składnika użytecznego B tj. jako minimalizację ilości nieprzereagowanego surowca w strumieniu wyjściowym reaktora w przedziale $[0, \tau]$

$$\int_0^\tau q(t) c_A(t, 1) dt.$$

Wprowadzamy standaryzację oznaczeń zmiennych procesowych chemicznego procesu tłokowego i ich pochodnych:

$x(t, z) \doteq c_A(t, z)$ - rozłożony stan procesu tłokowego,

$w(t, z) \doteq T_*(t, z)$ - rozłożone sterowanie procesu tłokowego,

$v(t) \doteq q(t)$ - skupione sterowanie przepływowe procesu tłokowego,

$u(t) \doteq c_{A_0}(t)$ - skupione sterowanie brzegowe procesu tłokowego,

$x_t(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu rozłożonego

względem zmiennej czasowej,

$x_z(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu rozłożonego

względem zmiennej przestrzennej.

Równanie stanu chemicznego procesu tłokowego w zapisie standardowym przybiera postać równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych

$$x_t(t, z) = -v(t)x_z(t, z) - \kappa e^{-\beta/w(t, z)} x^p(t, z), \quad (t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1]$$

z warunkiem początkowym

$$x(0, z) = x_0(z), \quad z \in [0, 1]$$

i brzegowym

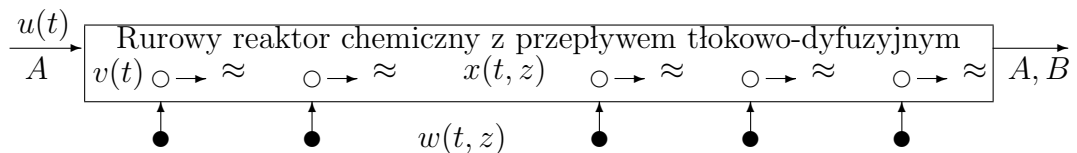
$$x(t, 0) = u(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Cel sterowania w zapisie standardowym określony jest jako minimalizacja całkowego wskaźnika jakości

$$\int_0^\tau v(t)x(t, 1)dt.$$

W przykładzie tym mamy do czynienia z trzema rodzajami sterowań - ze sterowaniem skupionym brzegowym $u(t)$, ze sterowaniem skupionym przepływowym $v(t)$ i ze sterowaniem rozłożonym temperaturowym $w(t, z)$. Niektóre sterowania procesu o parametrach rozłożonych mogą przybierać postać skupioną lub rozłożoną w zależności od konkretnych potrzeb realizacji danego procesu np. stosując spowolnienie przepływu w początkowej strefie reaktora i przyspieszenie w jego strefie końcowej przydamy rozłożony charakter sterowaniu przepływowemu $v(t, z)$.

Rozpatrzmy proces sterowania realizowany w rurowym reaktorze chemicznym z **przepływem tłokowo-dyfuzyjnym**

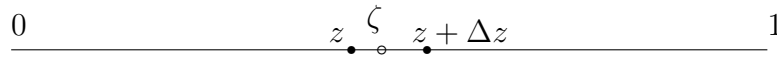


Opis dynamiki rozważanego procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym można uzyskać metodą bilansu masy dla małego elementu obiektu sterowania. Stosujemy oznaczenia

- $x(t, z)$ - rozłożony stan procesu tj. stężenie substancji surowcowej A w chwili t w punkcie z reaktora rurowego,

- $w(t, z)$ - rozłożone sterowanie procesu tj. intensywność źródła ciepła w chwili t w punkcie z reaktora,
- $u(t)$ - skupione sterowanie brzegowe procesu tj. stężenie substancji surowcowej A w chwili t w strumieniu wejściowym reaktora,
- $v(t)$ - skupione sterowanie przepływowe procesu tj. natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor w chwili t ,
- $x_t(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej czasowej,
- $x_z(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej,
- $x_{zz}(t, z)$ - druga pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej.

Wyróżniamy mały element reaktora $[z, z + \Delta z]$.



Niech $\zeta \in (z, z + \Delta z)$. Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu masy dla małego elementu $[z, z + \Delta z]$ reaktora:

$$\underbrace{ax_t(t, \zeta)\Delta z}_{\sigma_1} \approx \underbrace{av(t)(x(t, z) - x(t, z + \Delta z))}_{\sigma_2} + \underbrace{\alpha(x_z(t, z + \Delta z) - x_z(t, z))}_{\sigma_3} - \underbrace{\varkappa e^{-\beta/w(t, \zeta)} x^p(t, \zeta)\Delta z}_{\sigma_4},$$

gdzie

σ_1 - szybkość zmiany w czasie ilości substancji A w małym elemencie reaktora,

σ_2 - ilość substancji A wprowadzanej do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$,

σ_3 - dyfuzja (rozprzestrzenianie się) cząsteczek substancji A przez granice małego elementu z i $z + \Delta z$ ze współczynnikiem dyfuzji α (transport substancji przez powierzchnie o niezerowym gradiencie stężenia tej substancji powodujący wyrównywanie jej stężenia),

σ_4 - ilość substancji A ulegającej przemianie w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora,

a - współczynnik przekroju reaktora rurowego,

α - współczynnik dyfuzji,

\varkappa, β - współczynniki prawa Arrheniusa określającego wpływ temperatury na szybkość reakcji,

p - rząd reakcji przemiany $A \rightarrow B$.

W modelu aproksymującym uwzględniono nieliniową zależność szybkości reakcji od rozłożonego stanu procesu (np. dla $p = 2$ jest to zależność kwadratowa) oraz od rozłożonego sterowania temperaturowego (jest to nieliniowa i niewypukła zależność określona prawem Arrheniusa).

Dzieląc równanie aproksymujące przez $a\Delta z$ uzyskujemy

$$x_t(t, \zeta) \approx -v(t) \frac{x(t, z + \Delta z) - x(t, z)}{\Delta z} + \alpha(x_z(t, z + \Delta z) - x_z(t, z)) / \Delta z - \varkappa e^{-\beta/w(t, \zeta)} x^p(t, \zeta),$$

gdzie podstawiono $\alpha := \alpha/a$, $\varkappa := \varkappa/a$. Przejście graniczne $\Delta z \rightarrow 0$ tj. $\zeta \rightarrow z$ pozwala określić równanie stanu procesu w postaci równania bilansu masy procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym

$$x_t(t, z) = -v(t)x_z(t, z) + \alpha x_{zz}(t, z) - \varkappa e^{-\beta/w(t, z)} x^p(t, z),$$

$$(t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1].$$

Równanie to uzupełniamy **warunkami brzegowymi**

- na początku reaktora

$$v(t)x(t, 0) - \alpha x_z(t, 0) = v(t)u(t), \quad t \in [0, \tau],$$

- i na końcu reaktora

$$v(t)x(t, 1) + \alpha x_z(t, 1) = 0, \quad t \in [0, \tau]$$

oraz **warunkiem początkowym**

$$x(0, z) = x_0(z), \quad z \in [0, 1].$$

Równanie stanu jest w tym przypadku równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego. Wskaźnik jakości rozważanego procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym można określić jako maksymalizację średniego uzysku produktu użytecznego tj. jako minimalizację średniej ilości nieprzereagowanego surowca w strumieniu wyjściowym reaktora

$$\min \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v(t)x(t,1)dt.$$

Sterowanie procesem rozwoju populacji biologicznej o zróżnicowanej strukturze wiekowej

W dziedzinie procesów biotechnologicznych badane są procesy rozwoju populacji mikrobiologicznych i biologicznych. Jedną z klas takich procesów są procesy rozwoju populacji (mikro)biologicznej o zróżnicowanej strukturze wiekowej, gdzie stan procesu charakteryzowany jest przez gęstość osobników populacji $c_P(t, z)$ w chwili t i w wieku z . Tak więc rolę współrzędnej przestrzennej gra w tym przypadku współrzędna wiekowa osobników populacji.

Zmiennymi związanymi z procesem rozwoju populacji są:

- $c_P(t, z)$ - gęstość (mikro)populacji P w chwili t w wieku z ,
- $c_{P_0}(t)$ - intensywność narodzin osobników (mikro)populacji P w chwili t .

Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu masy dla małego przedziału wiekowego $[z, z + \Delta z]$ procesu rozwoju populacji ($\zeta \in (z, z + \Delta z)$):

$$\underbrace{\frac{\partial c_P(t, \zeta)}{\partial t}}_{\sigma_1} \Delta z \approx \underbrace{c_P(t, z) - c_P(t, z + \Delta z)}_{\sigma_2} - \underbrace{f(c_P(t, \zeta), t, \zeta)}_{\sigma_3} \Delta z,$$

gdzie

σ_1 - szybkość zmiany w czasie gęstości populacji P w małym przedziale wiekowym procesy,

σ_2 - zmiana gęstości populacji w małym przedziale wiekowym procesy,
 σ_3 - obumieranie osobników populacji w małym przedziale wiekowym
procesy,

$f(c_P(t, \zeta), t, \zeta)$ - funkcja umieralności osobników populacji w wieku
 ζ .

Dzieląc ostatnie równanie przez Δz i przechodząc do granicy $\Delta z \rightarrow 0$ uzyskujemy równanie dynamiki rozwoju populacji P o zróżnicowanej
strukturze wiekowej

$$\frac{\partial c_P(t, z)}{\partial t} = -\frac{\partial c_P(t, z)}{\partial z} \Delta z - f(c_P^p(t, z), t, z), \quad (t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1].$$

Warunek początkowy procesu określony jest przez początkowy rozkład
gęstości populacji

$$c_P(0, z) \doteq c_P(z), \quad z \in [0, 1],$$

zaś warunek brzegowy określony jest przez stymulowanie narodzin osob-
ników populacji P

$$c_P(t, 0) \doteq c_{P_0}(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Celem sterowania jest osiągnięcie w chwili końcowej τ pożądanej
gęstości populacji $c_{P\tau}(z)$ z uwzględnieniem kosztów stymulowania naro-
dzin osobników populacji tj. należy zminimalizować

$$\int_0^1 ((c_P(\tau, z) - c_{P\tau}(z))^2) dz + \rho \int_0^\tau c_{P_0}(t) dt,$$

gdzie ρ jest współczynnikiem kosztów stymulowania narodzin osobników
populacji.

Wprowadzamy oznaczenia standardowe

$x(t, z) \doteq c_P(t, z)$ - rozłożony stan procesu rozwoju populacji P o
zróżnicowanej strukturze wiekowej,

$u(t) \doteq c_{P_0}(t)$ - skupione sterowanie brzegowe rozwoju populacji P o
zróżnicowanej strukturze wiekowej.

Z matematycznego punktu widzenia proces opisywany jest za pomocą
równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$x_t(t, z) = -x_z(t, z) + f(x(t, z), t, z), \quad (t, z) \in [0, \tau] \times [0, 1]$$

z warunkiem początkowym

$$x(0, z) = x_0(z) \quad z \in [0, 1]$$

i z warunkiem brzegowym

$$x(t, 0) = u(t),$$

gdzie

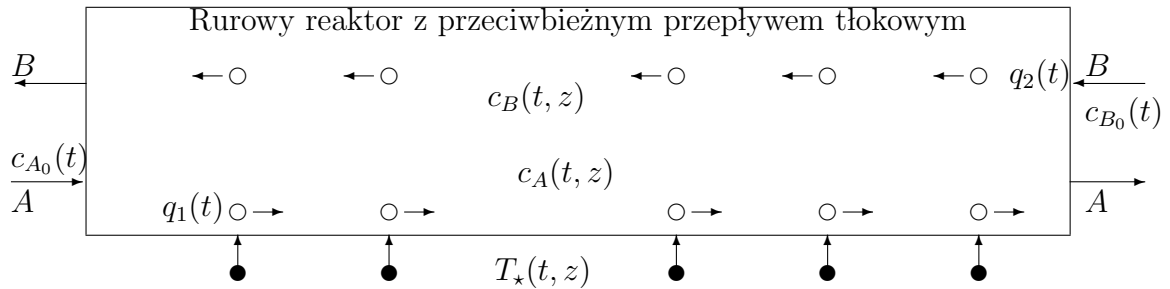
- $f(x(t, z), t, z)$ - funkcja umieralności osobników populacji w chwili t i w wieku z ,
- $x_0(z)$ - początkowy rozkład gęstości osobników,
- $u(t)$ - sterowanie brzegowe stymulujące narodziny osobników populacji.

Należy osiągnąć w chwili końcowej τ pożądany rozkład gęstości populacji $x_\tau(z)$ uwzględniając koszty sterowania tj. należy zminimalizować

$$\int_0^1 ((x(\tau, z) - x_\tau(z))^2) dz + \rho \int_0^\tau u(t) dt.$$

Układy sterowania o parametrach rozłożonych i o złożonej strukturze

Układy sterowania o parametrach rozłożonych mogą charakteryzować się złożoną strukturą. Niech proces sterowania będzie realizowany w rurowym reaktorze chemicznym z przeciwbieżnym przepływem tłokowym.



W procesie tym substancja B jest katalizatorem przemiany substancji A w B. Przeciwbieżne strumienie tych substancji stymulują proces przemiany.

Stosując oznaczenia chemicznego procesu z przepływem tłokowym opis dynamiki rozważanego procesu z przeciwbieżnym przepływem tłokowym można uzyskać metodą bilansu masy dla małego elementu reaktora $[z, z + \Delta z]$, ($\zeta \in (z, z + \Delta z)$):

- - w przypadku procesu podstawowego

$$\underbrace{a \frac{\partial c_A(t, \zeta)}{\partial t} \Delta z}_{\sigma_{11}} \approx \underbrace{aq(t)(c_A(t, z) - c_A(t, z + \Delta z))}_{\sigma_{12}} - \underbrace{f(c_A(t, \zeta), T_*(t, \zeta)) \Delta z}_{\sigma_{13}},$$

- - a w przypadku procesu przeciwbieżnego

$$\underbrace{a \frac{\partial c_B(t, \zeta)}{\partial t} \Delta z}_{\sigma_{21}} \approx \underbrace{aq(t)(c_B(t, z) - c_B(t, z + \Delta z))}_{\sigma_{22}} + \underbrace{f(c_B(t, \zeta), T_*(t, \zeta)) \Delta z}_{\sigma_{23}},$$

gdzie

σ_{i1} - szybkość zmiany w czasie ilości substancji odpowiednio A lub B w małym elemencie reaktora,

σ_{i2} - ilość substancji odpowiednio A lub B wprowadzanej do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$,

σ_{i3} - ilość substancji A ulegającej przemianom w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora,

a - współczynnik przekroju reaktora rurowego,

$f(c_A(t, \zeta), T_*(t, \zeta)) \doteq -\varkappa e^{-\beta/T_*(t, \zeta)} c_A^p(t, \zeta)$ - funkcja szybkości przemiany surowca A w produkt użyteczny B,

\varkappa, β - współczynniki prawa Arrheniusa określającego wpływ temperatury na szybkość reakcji,

p - rząd reakcji przemiany $A \rightarrow B$.

Powtarzając rozumowanie dla chemicznego procesu z przepływem tłokowym uzyskujemy opis dynamiki rozważanego procesu z przeciwbieżnym przepływem tłokowym w postaci układu równań o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_A(t, z)}{\partial t} &= -q_1(t) \frac{\partial c_A(t, z)}{\partial z} \Delta z - \varkappa e^{-\beta/T_*(t, z)} c_A^p(t, z), \\ \frac{\partial c_B(t, z)}{\partial t} &= q_2(t) \frac{\partial c_B(t, z)}{\partial z} \Delta z + \varkappa e^{-\beta/T_*(t, z)} c_B^p(t, z), \\ (t, z) &\in [0, \tau] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Równania te uzupełniamy dwoma warunkami początkowymi

$$c_A(0, z) = c_A(z), \quad c_B(0, z) = c_B(z), \quad z \in [0, z],$$

oraz dwoma warunkami brzegowymi

$$c_A(t, 0) = c_{A_0}(t), \quad c_B(t, 1) = c_{B_1}(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Cel sterowania przybiera postać maksymalizacji sumarycznej ilości produktu użytecznego B na wyjściu strumienia przeciwbieżnego

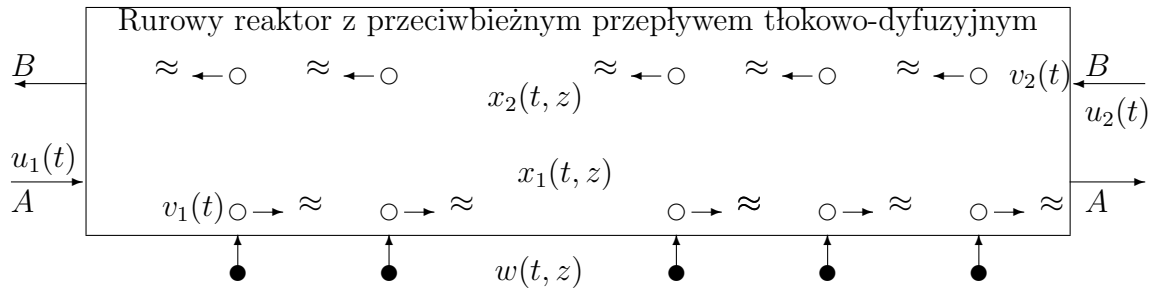
$$\int_0^\tau q_2(t) c_B(t, 0) dt.$$

Standardowy zapis równań stanu, warunków granicznych i celu sterowania jest w rozważanym przypadku następujący

$$\begin{aligned}
 x_{1,t}(t, z) &= -v_1(t)x_{1,z}(t, z) - \varkappa e^{-\beta/w(t,z)}x_1^p(t, z), \\
 x_{2,t}(t, z) &= v_2(t)x_{2,z}(t, z) + \varkappa e^{-\beta/w(t,z)}x_1^p(t, z), \\
 (t, z) &\in [0, \tau] \times [0, 1], \\
 x_1(0, z) &= x_1(z), \quad x_2(0, z) = x_2(z), \quad z \in [0, 1], \\
 x_1(t, 0) &= x_{10}(t), \quad x_2(t, 1) = x_{21}(t), \quad t \in [0, \tau], \\
 \max \int_0^\tau &v_2(t)x_2(t, 0)dt.
 \end{aligned}$$

Sterowanie procesami przeciwbieżnymi z przepływem tłokowo dyfuzyjnym.

Rozpatrzmy proces sterowania realizowany w rurowym reaktorze chemicznym z **przeciwbieżnym przepływem tłokowo-dyfuzyjnym**



Opis dynamiki rozważanego procesu z przeciwbieżnym przepływem tłokowo-dyfuzyjnym można uzyskać metodą bilansu masy dla małego elementu obiektu sterowania. Dla pochodnych cząstkowych stanu rozłożonego stosujemy oznaczenia

- $x_{1,t}(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu procesu podstawowego względem zmiennej czasowej,
- $x_{1,z}(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu procesu podstawowego względem zmiennej przestrzennej,

- $x_{1,zz}(t, z)$ - druga pochodna cząstkowa stanu procesu podstawowego względem zmiennej przestrzennej,
- $x_{2,t}(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu procesu przeciwbieżnego względem zmiennej czasowej,
- $x_{2,z}(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu procesu przeciwbieżnego względem zmiennej przestrzennej,
- $x_{2,zz}(t, z)$ - druga pochodna cząstkowa stanu procesu przeciwbieżnego względem zmiennej przestrzennej.

Niech $\zeta \in (z, z + \Delta z)$. Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu masy dla małego elementu $[z, z + \Delta z]$ reaktora uzyskując

- w przypadku procesu podstawowego

$$\underbrace{ax_{1,t}(t, \zeta)\Delta z}_{\sigma_1} \approx \underbrace{av_1(t)(x_1(t, z) - x_1(t, z + \Delta z))}_{\sigma_2} + \underbrace{\alpha(x_{1,z}(t, z + \Delta z) - x_{1,z}(t, z))}_{\sigma_3} - \underbrace{\kappa e^{-\beta/w(t, \zeta)} x_1^p(t, \zeta)\Delta z}_{\sigma_4},$$

gdzie

σ_1 - szybkość zmiany w czasie ilości substancji A w małym elemencie reaktora,

σ_2 - ilość substancji A wprowadzanej do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$,

σ_3 - dyfuzja (rozprzestrzenianie się) cząsteczek substancji A przez granice małego elementu z i $z + \Delta z$ ze współczynnikiem dyfuzji α (transport substancji przez powierzchnie o niezerowym gradiencie stężenia tej substancji powodujący wyrównywanie jej stężenia),

σ_4 - ilość substancji A ulegającej przemianie w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora,

a - współczynnik przekroju reaktora rurowego,

α - współczynnik dyfuzji,

κ, β - współczynniki prawa Arrheniusa określającego wpływ temperatury na szybkość reakcji,

p - rząd reakcji przemiany $A \rightarrow B$,

- w przypadku procesu przeciwbieżnego

$$\underbrace{ax_{2,t}(t, \zeta)\Delta z}_{\sigma_1} \approx - \underbrace{av_2(t)(x_2(t, z) - x_2(t, z + \Delta z))}_{\sigma_2} + \underbrace{\alpha(x_{2,z}(t, z + \Delta z) - x_{2,z}(t, z))}_{\sigma_3} - \underbrace{\varkappa e^{-\beta/w(t, \zeta)}x_1^p(t, \zeta)\Delta z}_{\sigma_4},$$

gdzie

σ_1 - szybkość zmiany w czasie ilości substancji B w małym elemencie reaktora,

σ_2 - ilość substancji B wprowadzanej do małego elementu przez ściankę $z + \Delta z$ i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę z ,

σ_3 - dyfuzja (rozprzestrzenianie się) cząsteczek substancji B przez granice małego elementu z i $z + \Delta z$ ze współczynnikiem dyfuzji α (transport substancji przez powierzchnie o niezerowym gradiencie stężenia tej substancji powodujący wyrównywanie jej stężenia),

σ_4 - ilość substancji A ulegającej przemianie w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora.

Dzieląc równania aproksymujące przez $a\Delta z$ i stosując przejście graniczne $\Delta z \rightarrow 0$ uzyskujemy równania stanu procesu w postaci równań bilansu masy procesu z przeciwbieżnym przepływem tłokowo-dyfuzyjnym

$$\begin{aligned} x_{1,t}(t, z) &= -v_1(t)x_{1,z}(t, z) + \alpha x_{1,zz}(t, z) \\ &\quad - \varkappa e^{-\beta/w(t, z)}x_1^p(t, z), \\ x_{2,t}(t, z) &= v_2(t)x_{2,z}(t, z) + \alpha x_{2,zz}(t, z) \\ &\quad + \varkappa e^{-\beta/w(t, z)}x_1^p(t, z), \\ (t, z) &\in [0, \tau] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Równania te uzupełniamy warunkami początkowymi i brzegowymi

- dla procesu podstawowego

$$x_1(0, z) = x_{10}(z), \quad z \in [0, 1],$$

$$v_1(t)x_1(t, 0) - \alpha x_{1,z}(t, 0) = v_1(t)u_1(t), \quad t \in [0, \tau],$$

$$v_1(t)x_1(t, 1) + \alpha x_{1,z}(t, 1) = 0, \quad t \in [0, \tau],$$

- dla procesu przeciwbieżnego

$$x_2(0, z) = x_{20}(z), \quad z \in [0, 1],$$

$$v_2(t)x_2(t, 1) - \alpha x_{2,z}(t, 1) = v_2(t)u_2(t), \quad t \in [0, \tau],$$

$$v_2(t)x_2(t, 0) + \alpha x_{2,z}(t, 0) = 0, \quad t \in [0, \tau].$$

Wskaźnik jakości rozważanego procesu z przeciwbieżnym przepływem tłokowym można określić jako maksymalizację uzysku produktu użytecznego w przeciwbieżnym strumieniu wyjściowym reaktora

$$\int_0^\tau v_2(t)x_2(t, 0)dt \rightarrow \max.$$