Politechnika Wrocławska Wydział Elektroniki

Katedra K8

Prof. dr hab. inż. Krystyn Styczeń

http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/krystyn.styczen/

Wprowadzenie do teorii sterowania. Procesy o parametrach skupionych

Literatura podstawowa

• T. Kaczorek i inni, Podstawy teorii sterowania, WNT, Warszawa 2005.

• T. Kaczorek, Teoria sterowania, PWN Warszawa t.1,1977, t.2,1981.

• T. Kaczorek, Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa 1996.

• H. Górecki, Optymalizacja systemów dynamicznych, PWN, Warszawa 1993.

• W. Pełczewski, Teoria sterowania, WNT, Warszawa 1980.

• A. Wierzbicki, Modele i wrażliwość układów sterowania, WNT, Warszawa 1977.

• J.M. Douglas, Dynamika i sterowanie procesów, WNT, Warszawa 1976.

• J. Pułaczewski, K. Szacka, A. Manitius, Zasady automatyki, WNT, Warszawa 1974.

• K. Ogata, Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania, WNT, Warszawa, 1974.

• B.P. Demidowicz, Matematyczna teoria stabilności, WNT, 1972.

Literatura uzupełniająca

• J. Zabczyk, Zarys matematycznej teorii sterowania,PWN, Warszawa 1991.

• R. Vinter, Optimal Control, Birkhauser, Boston 2000.

• J.T. Betts, Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming, SIAM, Philadelphia, 2010.

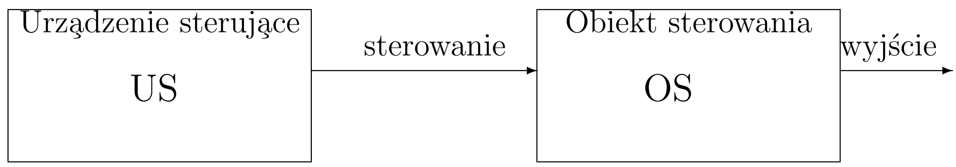
• L.T. Biegler, Nonlinear Programming. Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes, SIAM, Philadelphia, 2010.

Sterowanie jest to celowe oddziaływanie człowieka lub skonstruowanych przez niego urządzeń na **obiekt sterowania** (natury technicznej, biologicznej, ekonomicznej) zapewniające przebiegi procesów w obiekcie zgodne z przebiegami pożądanymi tj. zgodne z **zadaniem sterowania**.

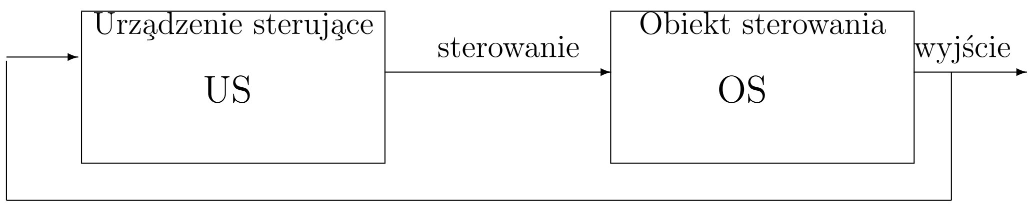
Sterowanie jest realizowane za pomocą **urządzenia sterującego**. Zespół urządzenia sterującego i obiektu sterowania nazywa się **układem sterowania** lub **systemem sterowania**.

Wyróżnia się dwie podstawowe struktury układów sterowania:

• **otwarty układ sterowania**, w którym urządzenie sterujące nie korzysta z informacji o aktualnym przebiegu procesów w obiekcie



• **zamknięty układ sterowania**, w którym urządzenie sterujące korzysta z informacji o aktualnym przebiegu procesów w obiekcie - w układzie tym wprowadzane jest więc **sprzężenie zwrotne** od obiektu do urządzenia sterującego.

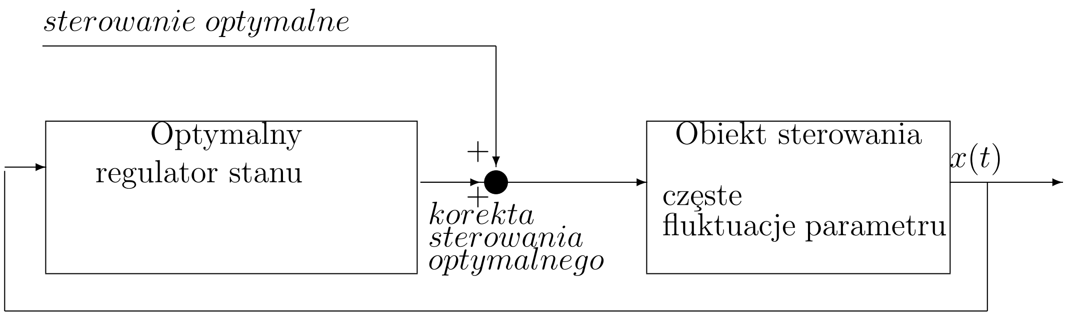


W otwartym układzie sterowania zakładana jest dokładna aprioryczna znajomość modelu obiektu. Na tej podstawie określany jest algorytm sterowania - nie uwzględnia on jednak bieżących zmian w obiekcie i może być mało dokładny.

W zamkniętym układzie sterowania wyjście obiektu jest mierzone i porównywane z jego pożądanym przebiegiem. Na tej podstawie określana jest korekta sterowania wprowadzana za pomocą pętli sprzężenia zwrotnego. Korekta ta uwzględnia bieżące zmiany w obiekcie wynikające np. z fluktuacji jego parametrów.

Dla szeregu układów pożądane przebiegi zmiennych procesowych określane są w rezultacie rozwiązania **zadania sterowania optymalnego** tj. optymalizacji wskaźnika jakości procesu (czas realizacji procesu, produkcja składnika użytecznego, straty energetyczne, zużycie surowca) z uwzględnieniem równań procesu i jego ograniczeń (ograniczenia dostępności surowców i energii, ograniczenia zakresu dopuszczalnych wartości zmiennych procesowych). W zamkniętych układach sterowania optymalnego dokonywana jest korekta sterowania optymalnego uwzględniająca odchylenie rzeczywistych przebiegów zmiennych procesowych od ich przebiegów optymalnych.

Układ sterowania optymalnego

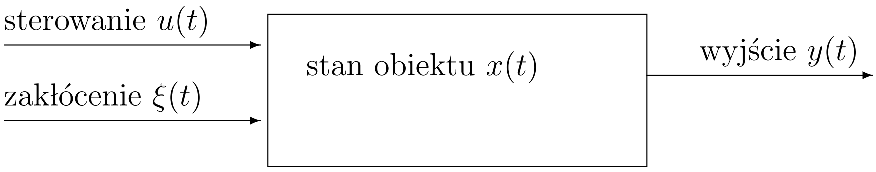


W układach sterowania badane są przebiegi wielkości charakteryzujących obiekt sterowania i urządzenie sterujące. Przebiegi te traktowane są jako funkcje czasu ciągłego $t \in [t_0, +\infty)$ lub jako funkcje czasu dyskretnego $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ...$

Model matematyczny obiektu (układu) obejmuje wielkości związane z obiektem (układem) i zależności między nimi.

Z **obiektami sterowania o czasie ciągłym** związane są następujące charakterystyczne wielkości będące funkcjami czasu ciągłego:

Obiekt sterowania



• **sterowanie obiektu** jest to wektor wielkości, za pomocą których urządzenie sterujące oddziałuje na obiekt

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ ... \\ u_m(t) \end{pmatrix},$$

• **wyjście obiektu** jest to wektor wielkości mierzonych w obiekcie lub wektor wielkości, za pomocą których obiekt oddziałuje na inne układy

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ ... \\ y_p(t) \end{pmatrix},$$

• **zakłócenie obiektu** jest to wektor wielkości niekontrolowanych, za pomocą których otoczenie oddziałuje na obiekt sterowania (zakłócenia mogą być deterministyczne lub losowe)

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ ... \\ \xi_q(t) \end{pmatrix},$$

• **stan obiektu** jest to najmniejszy liczebnie zespół wielkości, znajomość którego w danej chwili czasu t wraz ze znajomością wymuszeń $u(t)$ i $\xi(t)$ począwszy od chwili t pozwala jednoznacznie określić zachowanie się obiektu w przyszłości tj. przebiegi $x(t)$ i $y(t)$; stan obiektu charakteryzuje wnętrze obiektu i reprezentuje jego pamięć, w której gromadzone są skutki przeszłych oddziaływań na obiekt; wielkości $x_i(t)$ nazywane są współrzędnymi stanu lub zmiennymi stanu.

Stan obiektu jest na ogół wielkością wektorową i w związku z tym jest nazywany wektorem stanu obiektu

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

Przestrzeń n-wymiarowa o współrzędnych

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

jest zwana przestrzenią stanu. Krzywa, wzdłuż której przebiega wektor stanu w przestrzeni stanu, jest zwana trajektorią stanu obiektu sterowania. Stan obiektu jest w wielu przypadkach określany przez liczbę niezależnych zasobników energii w obiekcie.

Zależności między wielkościami charakteryzującymi układ sterowania o czasie ciągłym obejmują

• **równanie stanu obiektu**, które określa jego ewolucję w czasie przyjmując postać równania różniczkowego (liniowego lub nieliniowego)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \xi(t), t), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

$$f : R^n \times R^m \times R^q \times R \to R^n,$$

• **równanie wyjścia obiektu**, które wiąże wielkości mierzone ze stanem obiektu i wymuszeniami zewnętrznymi przyjmując postać dynamicznego równania algebraicznego

$$y(t) = g(x(t), u(t), \xi(t), t), \ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$g : R^n \times R^m \times R^q \times R \to R^p,$$

• **równanie urządzenia sterującego**, które wiąże sterowanie obiektu z jego wyjściem przyjmując postać dynamicznego równania algebraicznego

$$u(t) = k(y(t), \xi(t), t), \ \ t \in [t_0, t_1], \ \ k : R^p \times R \to R^m.$$

$$k : R^p \times R \to R^m.$$

Charakterystyczne klasy układów sterowania z czasem ciągłym.

Liniowe stacjonarne układy sterowania:

• równanie stanu obiektu ma postać liniowego stacjonarnego równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ \ x(t_0) = x_0, \ \ t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $A \in R^{n \times n}$ jest **macierzą stanu**, a $B \in R^{n \times m}$ jest **macierzą sterowania**,

• równanie wyjścia obiektu ma postać liniowego stacjonarnego równania algebraicznego

$$y(t) = Cx(t), \ \ t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $C \in R^{p \times n}$ jest **macierzą wyjścia**,

• równanie urządzenia sterującego ma postać liniowego stacjonarnego równania algebraicznego

$$u(t) = Ky(t) + \xi(t), \ \ t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $K \in R^{m \times p}$ jest **macierzą sprzężenia zwrotnego**, zaś $\xi(t)$ może reprezentować zakłócenie nakładające się na pętlę sprzężenia zwrotnego.

Liniowe niestacjonarne układy sterowania:

• równanie stanu obiektu ma postać liniowego niestacjonarnego równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $A(t) \in R^{n \times n}$ jest niestacjonarną macierzą stanu, a $B(t) \in R^{n \times m}$ jest niestacjonarną macierzą sterowania

• równanie wyjścia obiektu ma postać liniowego niestacjonarnego równania algebraicznego

$$y(t) = C(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $C(t) \in R^{p \times n}$ jest niestacjonarną macierzą wyjścia,

• równanie urządzenia sterującego ma postać liniowego niestacjonarnego równania algebraicznego

$$u(t) = K(t)y(t) + \xi(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $K(t) \in R^{m \times p}$ jest niestacjonarną macierzą sprzężenia zwrotnego.

Układy sterowania z opóźnieniami

Opóźnione oddziaływania stanu i sterowania na dynamikę obiektu prowadzą do równań stanu i równań wyjścia z odchylonym argumentem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h_1), u(t), u(t-h_2), \xi(t), t),$$

$$y(t) = g(x(t), x(t-h_1), \xi(t), t),$$

gdzie h_1 jest opóźnieniem stanu, a h_2 jest opóźnieniem sterowania. Dla liniowego stacjonarnego przypadku równania te przyjmują postać

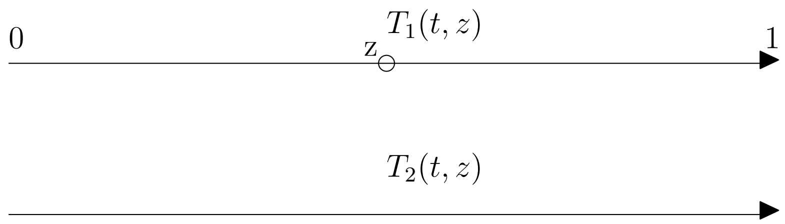
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \tilde{A}x(t-h_1) + Bu(t) + \tilde{B}u(t-h_2),$$

$$y(t) = Cx(t) + \tilde{C}x(t-h_1).$$

Układy sterowania z dynamiką

czasowo-przestrzenną

Sterowanie procesem wymiany ciepła
w rurowym wymienniku ciepła



Współbieżny proces wymiany ciepła realizowany jest np. w wymienniku ciepła typu "rura w rurze". Temperatura $T_1(t,z)$ zimnego strumienia ciepła jak i temperatura $T_2(t,z)$ ciepłego strumienia ciepła jest funkcją współrzędnej czasowej t i współrzędnej przestrzennej z. Opis matematyczny obiektów tego rodzaju prowadzi do równań dynamiki czasowo-przestrzennej

$$\frac{\partial x(t,z)}{\partial t} = f(x(t,z), \partial x(t,z)/\partial z, u(t,z), t, z),$$

$$y(t,z) = g(x(t,z), u(t,z), t, z), \quad (t,z) \in [t_0, t_1] \times [0,1],$$

gdzie stan układu $x(t,z)$ jest funkcją czasu t i zmiennej przestrzennej z (lub zmiennych przestrzennych z_1, z_2, z_3), a równania stanu mają postać równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych.

W charakterze ważnych przypadków szczególnych procesów sterowania o parametrach rozłożonych można wymienić **procesy z przepływem tłokowym** opisywane równaniami o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\frac{\partial x(t,z)}{\partial t} = -q(t)\frac{\partial x(t,z)}{\partial z} + f(x(t,z), u(t,z), t, z),$$

z prędkością przepływu $q(t)$ oraz **procesy z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym** opisywane równaniami o pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu

$$\frac{\partial x(t,z)}{\partial t} = -q(t)\frac{\partial x(t,z)}{\partial z} + \alpha\frac{\partial^2 x(t,z)}{\partial z^2}$$

$$+ f(x(t,z), u(t,z), t, z),$$

ze współczynnikiem dyfuzji α. Stosowany jest też uproszczony zapis pochodnych cząstkowych dla procesów tłokowych

$$x_t(t, z) = -q(t)x_z(t, z) + f(x(t, z), u(t, z), t, z),$$

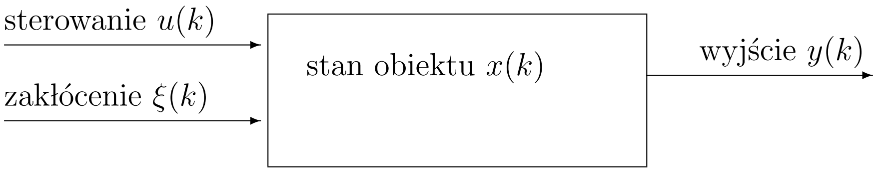
oraz dla procesów tłokowo-dyfuzyjnych

$$x_t(t, z) = -q(t)x_z(t, z) + \alpha x_{zz}(t, z)$$

$$+f(x(t, z), u(t, z), t, z).$$

Z **obiektami sterowania o czasie dyskretnym** $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, ...$ związane są następujące charakterystyczne wielkości będące funkcjami czasu dyskretnego:

Obiekt sterowania



• **sterowanie obiektu z czasem dyskretnym** jest to wektor wielkości zmienianych w chwilach czasu dyskretnego, za pomocą których urządzenie sterujące oddziałuje na obiekt

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ ... \\ u_m(k) \end{pmatrix},$$

• **wyjście obiektu z czasem dyskretnym** jest to wektor wielkości mierzonych w obiekcie w chwilach czasu dyskretnego

$$y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ ... \\ y_p(k) \end{pmatrix},$$

• **zakłócenie obiektu z czasem dyskretnym** jest to wektor wielkości niekontrolowanych, za pomocą których otoczenie oddziałuje na obiekt sterowania w chwilach czasu dyskretnego

$$\xi(k) = \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ ... \\ \xi_q(k) \end{pmatrix},$$

• **stan obiektu z czasem dyskretnym** jest to najmniejszy liczebnie zespół wielkości, znajomość którego w danej chwili czasu dyskretnego k wraz ze znajomością wymuszeń $u(k)$ i $\xi(k)$ począwszy od chwili k pozwala jednoznacznie określić zachowanie się obiektu z czasem dyskretnym w przyszłości tj. określić przebiegi $x(k)$ i $y(k)$

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ ... \\ x_n(k) \end{pmatrix},$$

Zależności między wielkościami charakteryzującymi układ sterowania o czasie dyskretnym obejmują

• **równanie stanu obiektu** w postaci równania różnicowego (liniowego lub nieliniowego)

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), \xi(k), k), \quad x(k_0) = x_0,$$

$$k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$f : R^n \times R^m \times R^q \times R \to R^n,$$

• **równanie wyjścia obiektu** w postaci dyskretnego równania algebraicznego

$$y(k) = g(x(k), u(k), \xi(k), k), \quad k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$g : R^n \times R^m \times R^q \times R \to R^p,$$

• **równanie urządzenia sterującego** w postaci dyskretnego równania algebraicznego

$$u(k) = k(y(k), \xi(k), k), \quad k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$k : R^p \times R \to R^m.$$

Charakterystyczne klasy układów sterowania z czasem dyskretnym.

Liniowe dyskretne stacjonarne układy sterowania:

• równanie stanu obiektu w postaci liniowego stacjonarnego równania różnicowego

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \;\; x(k_0) = x_0,$$

$$k = k_0, k_0 + 1, ...k_1,$$

$$A \in R^{n \times n}, \; B \in R^{n \times m},$$

• równanie wyjścia obiektu w postaci liniowego stacjonarnego dyskretnego równania algebraicznego

$$y(k) = Cx(k), \;\; k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$C \in R^{p \times n},$$

• równanie urządzenia sterującego w postaci liniowego stacjonarnego dyskretnego równania funkcyjnego

$$u(k) = Ky(k) + \xi(k), \;\; k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$K \in R^{m \times p},$$

gdzie A - macierz stanu układu dyskretnego, B - macierz sterowania układu dyskretnego, C - macierz wyjścia układu dyskretnego, K - macierz sprzężenia zwrotnego układu dyskretnego.

Liniowe dyskretne niestacjonarne układy sterowania:

• równanie stanu obiektu w postaci liniowego niestacjonarnego równania różnicowego

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \;\; x(k_0) = x_0,$$

$$k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$A(k) \in R^{n \times n}, \; B(k) \in R^{n \times m},$$

• równanie wyjścia obiektu w postaci liniowego niestacjonarnego dyskretnego równania funkcyjnego

$$y(k) = C(k)x(k), \quad k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$C(k) \in R^{p \times n},$$

• równanie urządzenia sterującego w postaci liniowego niestacjonarnego dyskretnego równania funkcyjnego

$$u(k) = K(k)y(k) + \xi(k), \quad k = k_0, k_0 + 1, ..., k_1,$$

$$K(k) \in R^{m \times p},$$

gdzie $A(k)$ - niestacjonarna macierz stanu układu dyskretnego, $B(k)$ - niestacjonarna macierz sterowania układu dyskretnego, $C(k)$ - niestacjonarna macierz wyjścia układu dyskretnego, $K(k)$ - niestacjonarna macierz sprzężenia zwrotnego układu dyskretnego.

Podstawowe **zadania sterowania** związane z realizacją pożądanych procesów w układach sterowania obejmują:

• **zadanie sterowania statycznego** - zadanie polega na wyborze stałego w czasie oddziaływania na obiekt zapewniającego stały w czasie przebieg stanu obiektu. Poszukujemy takiego statycznego procesu sterowania, który ma duży zapas stabilności i/lub małą wrażliwość na zmiany parametrów. Zadanie to odnosi się do autonomicznych obiektów sterowania funkcjonujących na długim horyzoncie czasowym przy braku zakłóceń,

• **zadanie optymalnego sterowania statycznego** - zadanie polega na wyborze takiego optymalnego statycznego procesu sterowania, który zapewnia optymalną wartość wskaźnika jakości procesu (maksymalny poziom produkcji substancji użytecznej, minimalne zużycie substancji surowcowych niezbędnych do prowadzenia procesu produkcyjnego, maksymalna selektywność procesu tj. względny poziom substancji użytecznej w odniesieniu do poziomu szkodliwej substancji ubocznej),

• **zadanie sterowania docelowego** - zadanie polega na przeprowadzeniu obiektu z zadanego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego lub do zadanego zbioru stanów końcowych; poszukujemy takiego dynamicznego procesu sterowania, który ma duży zapas stabilności i/lub małą wrażliwość na zmiany parametrów,

• **zadanie optymalnego sterowania docelowego** - zadanie polega na tym, aby spośród wszystkich trajektorii stanu przeprowadzających obiekt z zadanego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego wybrać trajektorię optymalną, dla której minimalizowany jest **wskaźnik jakości procesu** np. czas realizacji procesu (zadanie sterowania minimalnoczasowego) lub straty energetyczne na sterowanie (zadanie sterowania minimalnoenergetycznego),

• **zadanie sterowania okresowego** - zadanie polega na zastosowaniu okresowych oddziaływań sterujących na obiekt, które zapewniają pożądane uśrednione charakterystyki procesów zachodzących w obiekcie np. kompensują okresowe zakłócenia oddziałujące na obiekt,

• **zadanie optymalnego sterowania okresowego** - zadanie polega na tym, aby spośród wszystkich okresowych oddziaływań sterujących wybrać takie, które zapewni optymalny uśredniony wskaźnik jakości procesu np. jego maksymalną średnią wydajność,

• **zadanie optymalnego sterowania stochastycznego**- zadanie polega na tym, aby zminimalizować wartość oczekiwaną wskaźnika jakości dla układu sterowania, na który oddziałują zakłócenia przypadkowe,

• **zadanie sterowania adaptacyjnego** - zadanie polega na modyfikacji sterowania uwzględniającej zmiany parametrów układu,

- **zadanie regulacji stanu** - zadanie polega na tym, aby na podstawie pomiaru wyjścia obiektu określić taką korektę sterowania, która zniweluje odchylenie aktualnej trajektorii stanu od jej nominalnego przebiegu; zadanie to realizowane jest więc w układzie ze sprzężeniem zwrotnym,
- **zadanie optymalnej regulacji stanu** - zadanie polega na wyborze optymalnego sterowania korygującego przebieg trajektorii stanu, które np. minimalizuje straty energetyczne na sterowanie korygujące.

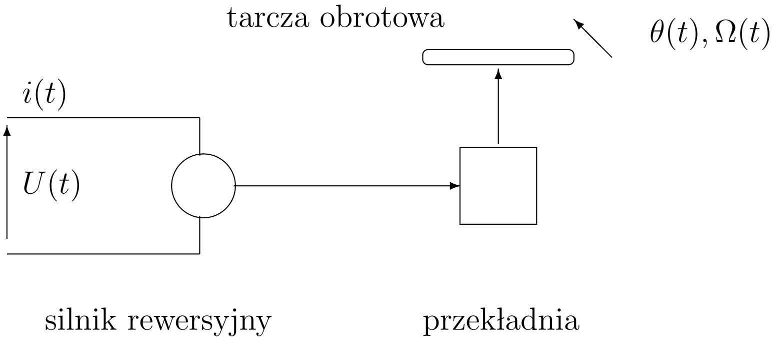
Podstawowe zagadnienia związane z realizacją zadań sterowania to:

- **badanie stabilności** układów sterowania tj. badanie wrażliwości nominalnej trajektorii stanu na zaburzenia stanu początkowego; zaburzona trajektoria stanu układu niestabilnego może oddalać się od trajektorii pożądanej powodując awarię układu (uszkodzenie mechaniczne wskutek nadmiernego naprężenia wału silnika, pożar instalacji wskutek nadmiernie narastającej temperatury układu, wybuch nadmiernie sprężonego składnika chemicznego procesu produkcyjnego),
- **badanie wrażliwości parametrycznej** układów sterowania tj. badanie wrażliwości nominalnej trajektorii stanu na zaburzenia parametrów układu,
- **badanie sterowalności** układów sterowania tj. badanie istnienia sterowania docelowego przeprowadzającego obiekt z zadanego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego; w związku z tym określane są warunki całkowitej lub częściowej sterowalności układu,
- **badanie obserwowalności** układów sterowania tj. określanie warunków, przy których na podstawie znajomości sterowania i wyjścia układu można jednoznacznie określić stan układu; w związku z tym określane są warunki całkowitej lub częściowej obserwowalności układu,
- **synteza układów sterowania o zadanych własnościach dynamicznych** np. synteza układu o zadanych wartościach własnych macierzy stanu, dla których układ sterowania ma duży zapas stabilności i małą oscylacyjność,

- **synteza wejściowo-wyjściowych układów sterowania** o zadanych zerach i biegunach transmitancji operatorowej zapewniających zarówno dużą dokładność jak i stabilność układu sterowania,
- **synteza obserwatorów stanu** układów sterowania zapewniających dokładne lub przybliżone odtwarzanie stanu układu,
- **badanie algorytmów sterowania optymalnego** tj. określanie warunków ich zbieżności i szybkości ich zbieżności.

Metody teorii sterowania stosowane są do projektowania i optymalizacji układów mechanicznych, elektromechanicznych, chemicznych procesów produkcyjnych, procesów biotechnologicznych i wielu innych.

Przykład: Układ sterowania tarczą obrotową



Wielkości fizyczne związane z układem:

- $\theta(t)$ - położenie kątowe tarczy w chwili t,
- $\Omega(t)$ - prędkość kątowa tarczy w chwili t,
- $i(t)$ - natężenie prądu obwodu sterującego silnika w chwili t,
- $U(t)$ - napięcie obwodu sterującego silnika w chwili t,

Z tarczą związane są przetworniki w postaci układu mostkowego przetwarzającego jej położenie kątowe na napięcie $U_1(t)$ oraz prądnicy tachometrycznej przetwarzającej jej prędkość kątową na napięcie $U_2(t)$.

Zależności między wielkościami fizycznymi układu: pochodna położenia kątowego tarczy określa jej prędkość kątową

$$\dot{\theta}(t) = \Omega(t), \;\; \theta(t_0) = \theta_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

pochodna prędkości kątowej tarczy (przyspieszenie tarczy) jest proporcjonalna do natężenia prądu obwodu sterującego silnika ze współczynnikiem proporcjonalności b

$$\dot{\Omega}(t) = b\, i(t), \;\; \Omega(t_0) = \Omega_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

napięcia wyjściowe przetworników są proporcjonalne do mierzonych wielkości

$$U_1(t) = c_1\, \theta(t), \;\; U_2(t) = c_2\, \Omega(t), \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie c_1 i c_2 są współczynnikami proporcjonalności przetworników.

Jeśli stosujemy sprzężenie zwrotne to wielkością sterującą staje się napięcie obwodu sterującego silnika $U(t)$ powiązane np. liniowo z napięciami wyjściowymi przetworników

$$U(t) = -k_1\, U_1(t) - k_2\, U_2(t), \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie k_1 i k_2 są współczynnikami ujemnego sprzężenia zwrotnego.

Stosujemy standardowe oznaczenia teorii sterowania:

$x_1(t) \doteq \theta(t),\ x_2(t) \doteq \Omega(t)$ - **zmienne stanu** układu,

$u(t) \doteq i(t)$ - **zmienna sterująca** układu,

$y_1(t) \doteq U_1(t),\ y_2(t) \doteq U_2(t)$ - **zmienne wyjściowe układu**.

Zapisujemy równania stanu układu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x_1(t_0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = b\, u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

równania wyjścia układu,

$$y_1(t) = c_1 x_1(t), \quad y_2(t) = c_2 x_2(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

oraz równanie sprzężenia zwrotnego

$$u(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Celem sterowania może być minimalizacja strat energetycznych na sterowanie lub minimalizacja czasu realizacji zadania sterowania. **Wskaźniki jakości** procesu sterowania docelowego tarczą obrotową tj. procesu przestawiania tarczy z zadanego położenia początkowego do zadanego położenia końcowego mogą więc przybierać postać:

dla **sterowania minimalnoenergetycznego**

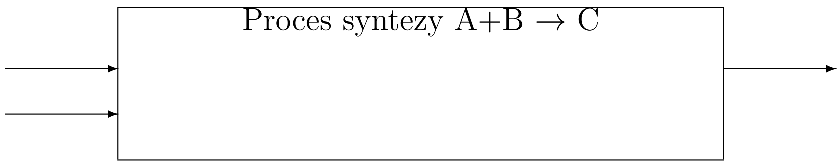
$$Q = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)dt,$$

a dla **sterowania minimalnoczasowego**

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0.$$

Jeśli stosujemy sprzężenie zwrotne to sterowanie minimalnoenergetyczne można zrealizować w układzie z liniowym sprzężeniem zwrotnym, zaś sterowanie minimalnoczasowe - w układzie z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym.

Przykład: Sterowanie statyczne chemicznym procesem produkcyjnym



Do zbiornikowego reaktora chemicznego wprowadzane są substancje surowcowe A i B. W reaktorze zachodzi proces syntezy A+B $\rightarrow$ C, gdzie C jest produktem użytecznym. Niech c_{A_0} i c_{B_0} oznaczają stężenia substancji A i B na wejściu reaktora, zaś c_A i c_B - stężenia tych substancji w reaktorze.

Statyczne równania stanu procesu wynikające z bilansu masy dla składników A i B przybierają postać

$$q_1 c_{A_0} - q c_A - \kappa c_A^{p_1} c_B^{p_2} = 0,$$

$$q_2 c_{B_0} - q c_B - \kappa c_A^{p_1} c_B^{p_2} = 0,$$

gdzie q_1 jest natężeniem dopływu substancji A do reaktora, q_2 jest natężeniem dopływu substancji B do reaktora, $q = q_1 + q_2$ jest natężeniem wypływu mieszaniny reagującej z reaktora, κ jest współczynnikiem szybkości reakcji, a p_1 i p_2 są współczynnikami określającymi rząd reakcji syntezy.

Suma stężeń składników reakcji jest stała: $c_A + c_B + c_C = 1$. Na podstawie tego równania można wyeliminować zmienną $c_C = 1 - c_A - c_B$.

Zmienne sterujące - stężenia substancji A i B na wejściu reaktora $u_1 = c_{A_0}$ i $u_2 = c_{B_0}$.

Zmienne stanu - stężenia substancji A i B w reaktorze $x_1 = c_A$ i $x_2 = c_B$.

Zmienna wyjściowa - stężenie produktu użytecznego w strumieniu wyjściowym $y = 1 - c_A - c_B$.

Statyczne równania stanu obiektu:

$$q_1 u_1 - q x_1 - \kappa x_1^{p_1} x_2^{p_2} = 0,$$

$$q_2 u_2 - q x_2 - \kappa x_1^{p_1} x_2^{p_2} = 0,$$

Statyczne równanie wyjścia:

$$y = 1 - x_1 - x_2.$$

Przedstawiony model opisuje proces sterowania przebiegający w stałej temperaturze tj. proces izotermiczny. Jeśli reaktor wyposażyć w obwód grzejny wymuszający temperaturę T w reaktorze, to współczynnik szybkości szybkości reakcji staje się funkcją temperatury zgodnie z prawem Arrheniusa

$$\kappa(T) \doteq \kappa_0 e^{-\beta/T},$$

gdzie κ_0 i β są dodatnimi parametrami. Zmieniając natężenie dopływu czynnika grzejnego możemy wpływać na temperaturę procesu i traktować ją jako dodatkowe sterowanie $u_3 = T$. Statyczne równania stanu ze sterowaniem temperaturowym przybiorą postać

$$q_1 u_1 - q x_1 - \kappa_0 e^{-\beta/u_3} x_1^{p_1} x_2^{p_2} = 0,$$

$$q_2 u_2 - q x_2 - \kappa_0 e^{-\beta/u_3} x_1^{p_1} x_2^{p_2} = 0,$$

Oprócz równań stanu uwzględnić należy także ograniczenia zakresu zmiennych procesowych

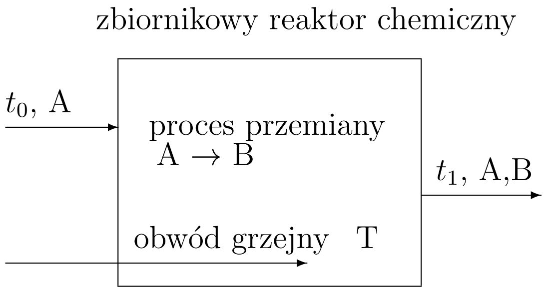
$$u_i^- \le u_i \le u_i^+, \;\; x_i^- \le x_i \le x_i^+ \;\; i = 1, 2, 3.$$

Dla szeregu procesów sterowania statyczne są ustalone na poziomach wynikających z ograniczonych średnich wydajności źródeł surowców i energii tj. $u_i = \bar{u}_i,\; i = 1, 2, 3$. Określeniu podlegają wtedy statyczne przebiegi zmiennych stanu.

Celem sterowania może być maksymalizacja wydajności procesu tj. minimalizacja wyrażenia

$$x_1 + x_2.$$

Przykład: Sterowanie wsadowym chemicznym procesem produkcyjnym



Do zbiornikowego reaktora chemicznego załadowany zostaje w chwili t_0 substrat A (substancja surowcowa). Ulega on przemianie w produkt użyteczny B pod wpływem katalizatora K w wyniku egzotermicznej reakcji przemiany A$\to$ B. Reaktor zostaje rozładowany w chwili t_1. Na temperaturę procesu można wpływać za pomocą obwodu grzejnego zainstalowanego w reaktorze.

Wielkości fizyko-chemiczne związane z procesem:

- $c_A(t)$ - stężenie substratu A w reaktorze w chwili t,
- $T(t)$ - temperatura w reaktorze w chwili t,
- $T_0(t)$ - temperatura czynnika grzejnego na wejściu reaktora,

Zależności między wielkościami fizyko-chemicznymi procesu: szybkość zmiany stężenia substratu A (i produktu użytecznego B) w reaktorze określona jest przez szybkość reakcji A$\to$ B zależną od aktualnego stężenia A w reaktorze i temperatury mieszaniny reagującej zgodnie z prawem Arrheniusa

$$\dot{c}_A(t) = -a\, e^{-b/T(t)} c_A^2(t), \;\; t \in [t_0, t_1], \;\; c_A(t_0) = c_{A0},$$

szybkość zmiany temperatury w reaktorze zależy od przebiegu temperatury wejściowej i szybkości pochłaniania ciepła przez reakcję

$$\dot{T}(t) = T_0(t) - c\, e^{-b/T(t)} c_A^2(t), \;\; t \in [t_0, t_1], \;\; T(t_0) = T_0,$$

gdzie a, b i c są parametrami procesu.

Jeśli określony jest pożądany przebieg temperatury na wejściu reaktora $\hat{T}_0(t)$ i w reaktorze $\hat{T}(t)$ (np. przebieg optymalny w sensie pewnego wskaźnika jakości), to zaburzenie tego przebiegu może być regulowane za pomocą sprzężenia zwrotnego

$$T_0(t) = \hat{T}_0(t) - k(T(t) - \hat{T}(t)),$$

gdzie k jest współczynnikiem sprzężenia zwrotnego.

Stosujemy standardowe oznaczenia teorii sterowania:

$u(t) \doteq T_0(t)$ - **zmienna sterująca** procesu,

$x_1(t) \doteq c_A(t),\; x_2(t) = T(t)$ - **zmienne stanu** procesu,

$y(t) \doteq T(t)$ - **zmienna wyjściowa** procesu.

Zapisujemy równania stanu procesu

$$\dot{x}_1(t) = -a\, e^{-b/x_2(t)} x_1^2(t), \;\; t \in [t_0, t_1], \;\; x_1(t_0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - c\; a\, e^{-b/x_2(t)} x_1^2(t), \;\; t \in [t_0, t_1], \; , \;\; x_2(t_0) = x_{20}$$

równanie wyjścia procesu,

$$y(t) = x_2(t), \;\; t \in [t_0, t_1],$$

oraz równanie sprzężenia zwrotnego procesu

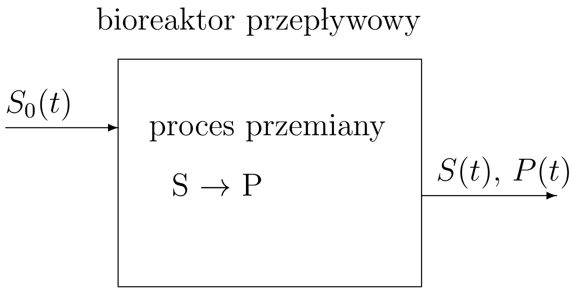
$$u(t) = \hat{u}(t) - k\; (x_2(t) - \hat{x}_2(t), \;\; t \in [t_0, t_1].$$

Wskaźnik jakości procesu sterowania wsadowym chemicznym procesem produkcyjnym może przybierać postać kombinacji kosztów nagrzewania i wartości produktu użytecznego

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt - d\; (1 - x_1(t_1)),$$

gdzie d jest współczynnikiem wartości tego produktu. **Cel sterowania** jest więc równoważny maksymalizacji zysku z prowadzenia procesu.

Przykład: Sterowanie procesem biotechnologicznym w bioreaktorze przepływowym



Rozważmy proces sterowania stężeniem wejściowym substratu S wprowadzanego do zbiornikowego bioreaktora przepływowego, gdzie zachodzi jego przemiana w biomasę dokonywana przez **populację mikrobiologiczną** P umieszczoną w bioreaktorze (lub przemiana w produkt metabolizmu tej populacji). Substratem może być specjalnie dobrana pożywka dla populacji P (produkcja farmaceutyków), a także ścieki lub odpady (procesy biooczyszczania).

Wielkościami fizyko-biochemicznymi procesu są:

- $S_0(t)$ - stężenie substratu S na wejściu bioreaktora w chwili t,
- $S(t)$ - stężenie substratu S w bioreaktorze w chwili t,
- $P(t)$ - stężenie populacji mikrobiologicznej P w bioreaktorze w chwili t.

Zależności między wielkościami fizyko-chemicznymi procesu: szybkości zmiany stężenia substratu i populacji są określone przez wielkości dopływu i odpływu bioskładników procesu oraz przez szybkość przetwarzania substratu przez populację

$$\dot{S}(t) = q(S_0(t) - S(t) - a\,\frac{S(t)}{b + S(t)} P(t),$$

$$S(t_0) = S_0, \;\; t \in [t_0, t_1], \;\; t_1 >> t_0,$$

$$\dot{P}(t) = -qP(t) + c\,\frac{S(t)}{b + S(t)} P(t),$$

$$P(t_0) = P_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie a, b i c są parametrami funkcji przyrostu populacji, zaś q jest natężeniem przepływu biomieszaniny przez bioreaktor.

Stosujemy standardowe oznaczenia teorii sterowania:

$u(t) \doteq S_0(t)$ - **zmienna sterująca** procesu tj. stężenie wejściowe substratu w chwili t,

$x_1(t) \doteq S(t),\ x_2(t) \doteq P(t)$ - **zmienne stanu** procesu tj. stężenia substratu i populacji w reaktorze w chwili t,

Zapisujemy równania stanu procesu w postaci standardowej

$$\dot{x}_1(t) = q(u(t) - x_1(t)) - a\,\frac{x_1(t)}{b + x_1(t)}x_2(t),$$

$$x_1(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -qx_2(t) + c\,\frac{x_1(t)}{b + x_1(t)}x_2(t),$$

$$x_1(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Dla niektórych bioprocesów charakterystyczne jest opóźnienie szybkości przyrostu populacji po zmianie stężenia substratu. Równania stanu bioprocesu przybierają wtedy postać równań różniczkowych z odchylonym argumentem

$$\dot{x}_1(t) = q\ (u(t) - x_1(t)) - a\,\frac{x_1(t)}{b + x_1(t)}x_2(t),$$

$$x_1(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -q\ x_2(t) + c\,\frac{x_1(t-h)}{b + x_1(t-h)}x_2(t),$$

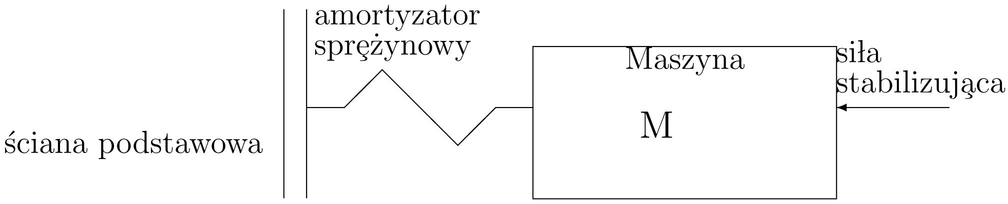
$$x_1(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

gdzie h jest opóźnieniem szybkości przyrostu populacji po zmianie stężenia substratu.

Celem sterowania może być w tym przypadku maksymalizacja sumarycznego uzysku biomasy tj.
maksymalizacja **wskaźnika jakości** procesu postaci

$$\int_{t_0}^{t_1} qx_2(t)dt.$$

Przykład: Sterowanie mechanicznym oscylatorem



Położenie $\ell(t)$ maszyny M stabilizowane jest w punkcie $\bar{\ell} = 0$ (położenie neutralne) za pomocą siły stabilizującej $F(t)$ i amortyzatora sprężynowego o współczynniku sprężystości a. Podstawowe równanie ruchu maszyny M odzwierciedla redukcję jej przyspieszenia przez amortyzator proporcjonalnie do jej odchylenia od położenia neutralnego i proporcjonalnie do siły stabilizującej $F(t)$:

$$\ddot{\ell}(t) = -a\ell(t) - F(t), \;\; \ell(t_0) = \ell_0, \;\; \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \;\; t \in [t_0, t_1].$$

Równanie ruchu swobodnego maszyny ($F(t) = 0$) przybiera postać

$$\ddot{\ell}(t) = -a\ell(t), \;\; \ell(t_0) = \ell_0, \;\; \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \;\; t \in [t_0, t_1].$$

Ostatnie równanie posiada równanie charakterystyczne $r^2 = -ar$, którego pierwiastki są urojone $r_{1,2} = \pm \jmath \sqrt{a}$. Oznaczając $\omega \doteq \sqrt{a}$ możemy zapisać rozwiązanie równania ruchu swobodnego jak następuje

$$\ell(t) = C_1 cos\, \omega t + C_2 sin\, \omega t, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie stałe C_1 i C_2 są określone przez warunki poczatkowe. Tak więc ruch swobodny maszyny M ma charakter oscylacyjny. Obiekt sterowania można określić mianem oscylatora mechanicznego. Jeśli układ jest wyposażony oprócz amortyzatora sprężynowego także w tłumik i wprowadzone są dwa oddziaływania zewnętrzne - stabilizujące $F_1(t)$ i tłumiące drgania pochodzące z otoczenia $F_2(t)$, to równanie ruchu maszyny przybierze postać

$$\ddot{\ell}(t) = -a_1\ell(t) - a_2\dot{\ell}(t) - F_1(t) - F_2(t),$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \;\; \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie a_1 jest współczynnikiem sprężystości amortyzatora, zaś a_2 - współczynnikiem tłumienia tłumika. Amortyzator może wykazywać działanie nieliniowe stabilizujące przy większych odchyleniach obiektu od położenia równowagi

$$\ddot{\ell}(t) = -a_1\ell(t) - a_{11}\ell^3(t) - a_2\dot{\ell}(t) - F_1(t) - F_2(t),$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \;\; \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

oraz działanie nieliniowe destabilizujące obiekt przy takich odchyleniach (tzw. efekt miękkiej sprężyny)

$$\ddot{\ell}(t) = -a_1\ell(t) + a_{11}\ell^3(t) - a_2\dot{\ell}(t) - F_1(t) - F_2(t),$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \;\; \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie $a11$ jest współczynnikiem sprężystości nieliniowej składowej amortyzatora. W innych sytuacjach r'ownież działanie tłumika ma nieliniowy charakter

$$\ddot{\ell}(t) = -a_1\ell(t) - a_2\dot{\ell}^2(t)sign(\dot{\ell}(t)) - F_1(t) - F_2(t),$$

$$\ell(t_0) = \ell_0, \;\; \dot{\ell}(t_0) = \dot{\ell}_0, \;\; t \in [t_0, t_1],$$

gdzie funkcja znaku $sign$ jest wprowadzona dlatego, aby siła oporu była zawsze przeciwna do prędkości.

Zakładamy, że zarówno położenie $\ell(t)$ maszyny jak i jej prędkość $\dot{\ell}(t)$ są mierzone za pomocą przetworników reprezentujących te wielkości w postaci sygnałów napięciowych $U_1(t)$ i $U_2(t)$ (ze współczynnikami proporcjonalności c_1 i c_2), które mogą być wykorzystane w pętli sprzężenia zwrotnego do generowania siły stabilizującej $F(t)$ w odpowiednim układzie napięciowym.

Stosujemy oznaczenia standardowe teorii sterowania do modelu oscylatora mechanicznego:

$x_1(t) \doteq \ell(t),\ x_2(t) \doteq \dot{\ell}(t)$ - **zmienne stanu** oscylatora,

$u_1(t) \doteq F_1(t),\ u_2(t) \doteq F_2(t)$ - **zmienne sterujące** oscylatora,

$y_1(t) \doteq U_1(t),\ y_2(t) \doteq U_2(t)$ - **zmienne wyjściowe** oscylatora,

równania stanu liniowego oscylatora mechanicznego

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \ x_1(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t)$$

$$-b_1 u_1(t) - b_2 u_2(t),\ \ x_2(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_1],$$

gdzie b_1 i b_2 są współczynnikami normalizacyjnymi sterowania,

równania wyjścia oscylatora mechanicznego

$$y_1(t) = c_1 x_1(t),\ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$y_2(t) = c_2 x_2(t),\ \ t \in [t_0, t_1],$$

równania stanu oscylatora mechanicznego z nieliniowym amortyzatorem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \ x_1(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) \pm a_{11} x_1^3(t) - a_2 x_2(t)$$

$$-b_1 u_1(t) - b_2 u_2(t),\ \ x_2(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_1],$$

równania stanu oscylatora mechanicznego z nieliniowym tłumikiem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \ x_1(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2^2(t) sign(x_2(t))$$

$$-b_1 u_1(t) - b_2 u_2(t),\ \ x_2(t_0) = 0,\ \ t \in [t_0, t_1].$$