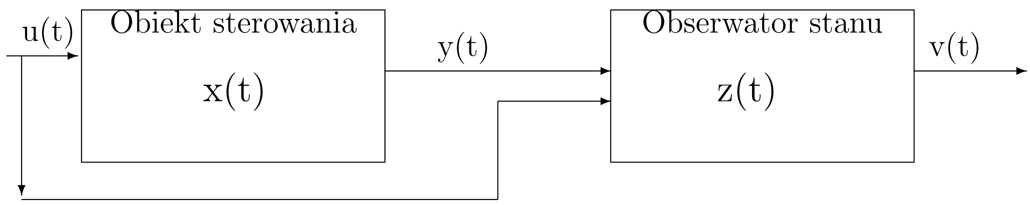
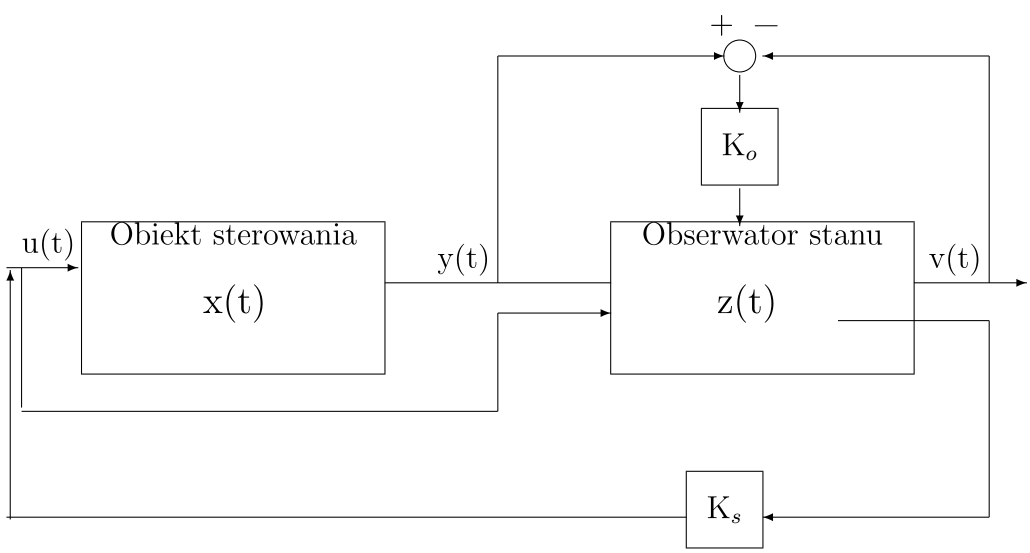
# Projektowanie układów sterowania z wykorzystaniem ich postaci kanonicznych

Niech będzie dany układ sterowania taki, że nie wszystkie jego zmienne stanu są bezpośrednio dostępne (mierzalne). Układ pozwalający odtworzyć na podstawie znajomości sterowania i wyjścia niedostępne zmienne stanu nazywa się **obserwatorem stanu**. Obserwatory stanu znajdują zastosowanie m.in. do poprawy własności stabilnościowych układów sterowania za pomocą odpowiednio dobranego sprzężenia zwrotnego.




Do projektowania układów sterowania zastosowanie znajdują dwie charakterystyczne postaci równań stanu: **postać kanoniczna sterowalna i postać kanoniczna obserwowalna**.

Niech układ sterowania będzie opisywany następującymi liniowymi stacjonarnymi równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}u(t), \quad y(t) = \bar{c}\bar{x}(t),$$

gdzie $\bar{A}$ jest $n$-wymiarową macierzą kwadratową, $\bar{b}$ jest $n$-wymiarowym wektorem kolumnowym, a $\bar{c}$ jest $n$-wymiarowym wektorem wierszowym.

Układ ma **postać kanoniczną sterowalną** jeśli macierze stanu $\bar{A}$ i sterowania $\bar{b}$ przyjmują następujące postaci

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

W powyższym zapisie macierz stanu jest macierzą typu Frobeniusa.

**Sprowadzanie układu sterowania do postaci Frobeniusa**

Jednowymiarowy wejściowo-wyjściowy układ sterowania nie mający postaci Frobeniusa można sprowadzić do tej postaci stosując liniowe przekształcenie stanu

$$x(t) = T\tilde{x}(t), \quad T \doteq (B \ AB \ ... \ A^{n-1}B)(B_f \ A_f B_f \ ... \ A_f^{n-1}B_f)^{-1},$$

gdzie $A, B$ są macierzami stanu i sterowania w układzie pierwotnym, zaś $A_f, B_f$ są macierzami stanu i sterowania o postaci Frobeniusa. Po dokonaniu tej transformacji przechodzimy do układu sterowania

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}BU(t)$$

mającym postać Frobeniusa i stosujemy znany algorytm przesuwania biegunów i zer układu o tej postaci.

Proste obliczenia pokazują, że

$$rank(\bar{b} \ \bar{A}\bar{b} \ \bar{A}^2\bar{b} \ ... \ \bar{A}^{n-1}\bar{b}) = n.$$

Oznacza to, że układ, którego równanie stanu ma postać kanoniczną sterowalną, jest sterowalny.

Układ ma **postać kanoniczną obserwowalną** jeśli macierze stanu $\bar{A}$ i wyjścia $\bar{c}$ przyjmują następujące postaci

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W powyższym zapisie macierz stanu jest również macierzą typu Frobeniusa. Proste obliczenia pokazują, że

$$rank \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}\bar{A} \\ \bar{c}\bar{A}^2 \\ ... \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Oznacza to, że układ, którego równanie stanu ma postać kanoniczną obserwowalną, jest obserwowalny.

### Przekształcanie układu sterowania do postaci kanonicznej sterowalnej

Niech będzie dany układ sterowania z równaniem stanu w ogólnej postaci liniowej

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t).$$

Uzyskiwanie postaci kanonicznej sterowalnej polega na zastosowaniu przekształcenia liniowego wektora stanu

$$\bar{x}(t) = Mx(t),$$

gdzie nieosobliwa macierz $M$ wiąże wektor stanu $x(t)$ układu danego z wektorem stanu $\bar{x}(t)$ układu w postaci kanonicznej sterowalnej. Stosując przekształcenie $M$ do układu danego otrzymujemy

$$\dot{\bar{x}}(t) = M\dot{x}(t) = MAx(t) + Mbu(t) = MAM^{-1}\bar{x}(t) + Mbu(t),$$

co oznacza, że dla układu przekształconego uzyskujemy równanie stanu

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}u(t),$$

gdzie

$$\bar{A} = MAM^{-1}, \ \ \bar{b} = Mb.$$

Macierze $\bar{A}$ i $A$ są podobne, a zatem ich wielomiany charakterystyczne są identyczne. Zbadamy powiązanie sterowalności układu przekształconego i układu danego. W tym celu stosując przekształcenie $M$ określimy zależność między macierzami sterowalności układu przekształconego i układu danego

$$\bar{Q} = (\bar{b} \ \bar{A}\bar{b} \ \bar{A}^2\bar{b} \ ... \ \bar{A}^{n-1}\bar{b})$$

$$= (Mb \ MAM^{-1}Mb \ (MAM^{-1})^2Mb \ ... \ (MAM^{-1})^{n-1}Mb)$$

Ponieważ

$$(MAM^{-1})^k = \underbrace{MAM^{-1}MAM^{-1}...MAM^{-1}}_{k \ razy} = MA^kM^{-1},$$

a zatem

$$\bar{Q} = (Mb \ MAM^{-1}Mb \ MA^2MM^{-1}b \ ... \ MA^{n-1}M^{-1}Mb)$$
$$= M(b \ Ab \ A^2b \ ... \ A^{n-1}b) = MQ,$$

gdzie $Q$ jest macierzą sterowalności układu danego. Rzędy macierzy $\bar{Q}$ i $Q$ są równe ze względu na nieosobliwość przekształcenia $M$. Zastosowanie tego przekształcenia nie wpływa na sterowalność układu. Wynika stąd także wniosek, że postać kanoniczną sterowalną układu można uzyskać tylko dla układu sterowalnego.

Założymy więc, że układ dany jest sterowalny.

Zapiszemy wielomian charakterystyczny układu danego w postaci

$$det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_2s^2 + a_1s + a_0.$$

Dla określenia prostego algorytmu sprowadzania układu do postaci kanonicznej sterowalnej celowo jest posłużyć się odwrotnością $W$ macierzy $M$ tj. $W = M^{-1}$. Dla macierzy $W$ uzyskujemy zależność

$$W\bar{A} = AW.$$

Wydzielimy kolumny macierzy $W$ w następujący sposób

$$W = \begin{pmatrix} w_{n-1} & ... & w_2 & w_1 & w_0 \end{pmatrix}$$

Na podstawie tego zapisu uzyskujemy równości

$$W\bar{A} = \begin{pmatrix} w_{n-1} & ... & w_2 & w_1 & w_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_0 w_0 & w_{n-1} - a_1 w_0 & ... & w_1 - a_{n-1} w_0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$AW = A \begin{pmatrix} w_{n-1} & w_{n-2} & ... & w_1 & w_0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} Aw_{n-1} & Aw_{n-2} & ... & Aw_1 & Aw_0 \end{pmatrix}$$

Przyrównując do siebie wyrażenia uzyskane dla $W\bar{A}$ i $AW$ uzyskujemy układ równań

$$-a_0 w_0 = Aw_{n-1}$$

$$w_{n-1} - a_1 w_0 = Aw_{n-2}$$

$$...$$

$$w_2 - a_{n-2} w_0 = Aw_1$$

$$w_1 - a_{n-1} w_0 = Aw_0$$

Uzyskana zależność pozwala na rekurencyjne obliczanie kolumn $w_i$: dla zadanej wartości początkowej $w_0$ obliczamy kolejno

$$w_1 = a_{n-1} w_0 + Aw_0$$

$$w_2 = a_{n-2} w_0 + Aw_1$$

$$...$$

$$w_{n-2} = a_2 w_0 + Aw_{n-3}$$

$$w_{n-1} = a_1 w_0 + A w_{n-2}$$

Pozostała , nie wykorzystana zależność $-a_0 w_0 = A w_{n-1}$, jest spełniona, bo po prostych przekształceniach przyjmuje ona postać

$$A w_{n-1} + a_0 w_0 = A(a_1 w_0 + A w_{n-2}) + a_0 w_0 =$$

$$= A(a_1 w_0 + A(a_2 w_0 + A w_{n-3})) + a_0 w_0$$

$$= (a_0 I + a_1 A + a_2 A^2) w_0 + A^3 w_{n-3} =$$

$$= ... =$$

$$= (a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_{n-1} A^{n-1} + A^n) w_0 = 0,$$

a wyrażenie w nawiasie wyzerowuje się na podstawie twierdzenia Cayleya-Hamiltona: każda macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Poszukiwana macierz $W$ powinna także zapewniać założoną postać macierzy sterowania, co oznacza, że

$$W\bar{b} = b$$

czyli

$$\begin{pmatrix} w_{n-1} & ... & w_1 & w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

Wynika stąd, że $w_0 = b$ i obliczanie wierszy macierzy $W$ możemy przeprowadzić rekurencyjnie

$$w_0 = b$$

$$w_1 = a_{n-1} b + A w_0$$

$$w_2 = a_{n-2} b + A w_1$$

$$...$$

$$w_{n-1} = a_1 b + A w_{n-2}$$

Daje to w wyniku

$$w_0 = b$$

$$w_1 = Ab + a_{n-1}b$$

$$w_2 = A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b$$

$$...$$

$$w_{n-1} = A^{n-1}b + ... + a_3A^2b + a_2Ab + a_1b$$

**Przykład**. Niech liniowy układ sterowania będzie opisywany równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zbadamy czy dany układ sterowania jest sterowalny. Do tego celu wykorzystamy macierz sterowalności

$$S = \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{pmatrix}$$

W wyniku kolejnych obliczeń otrzymujemy

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Badamy rząd macierzy $S$

$$detS = det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

a więc $rankS$=4, co oznacza, że rozpatrywany układ sterowania jest sterowalny.

Wielomian charakterystyczny macierzy $A$ ma postać

$$det(sI - A) = det \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ 1 & s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & -1 \\ -1 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} = s^4 + s^2$$

Zapiszemy ten wielomian w postaci

$$det(sI - A) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

gdzie $a_3 = 0,\ a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = 0.$

Wyznaczymy macierz przekształcenia liniowego pozwalającego uzyskać postać kanoniczną sterowalną układu. Algorytm wyznaczania wierszy macierzy $M$ przybiera dla rozpatrywanego przykładu następują postać

$$w_0 = b$$

$$w_1 = a_3 b + A w_0$$

$$w_2 = a_2 b + A w_1$$

$$w_3 = a_1 b + A w_2$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$M = 0.5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Natomiast postać kanoniczna sterowalna układu będzie następująca

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

**Postać kanoniczna obserwowalna liniowego układu sterowania**

Aby określić prosty i realizowalny algorytm projektowania obserwatora stanu o pożądanych własnościach wprowadzimy uzależnienie procesu odtwarzania wektora stanu od rezultatów tego procesu i zastosujemy przekształcenie opisu układu do tzw. postaci kanonicznej obserwowalnej. Wspomniane uzależnienie procesu odtwarzania wektora stanu od rezultatów tego procesu uzyskuje si drogą wyznaczenia różnicy wyjść układu $y(t)$ i obserwatora $v(t)$. Dla układu sterowania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

działanie proponowanego obserwatora można opisać równaniem

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + K(v(t) - y(t)), \quad v(t) = Cz(t).$$

Odejmując stronami powyższe równania uzyskuje się

$$\dot{z}(t) - \dot{x}(t) = A(z(t) - x(t)) + KC(z(t) - x(t)).$$

Zatem błąd $\dot{e}(t) \doteq z(t) - x(t)$ odtworzenia wektora stanu spełnia równanie

$$\dot{e}(t) = (A + KC)e(t).$$

Warunkiem zanikania tego błędu jest wymaganie, aby wartości własne macierzy A+KC były położone w lewej półpłaszczyniezmiennej zespolonej. Aby obserwator mógł realizować swoje zadanie, należy dla zadanych macierzy A i C dobrać macierz K sprzężenia układu i jego obserwatora tak, aby wspomniany warunek był spełniony. Wykażemy, że jest to możliwe dla obserwowalnych układów sterowania. Co wicej wykażemy, że moña tak dobrać macierz sprzeężenia K układu i obserwatora, aby wartości własne macierzy A+KC miały z góry zadane położenia. Tak więc proces zanikania błędu będzie miał zadane własności dynamiczne - w szczególności będzie miał określony czas zanikania błędu i określone parametry oscylacji odpowiedzi.

Założymy, że układ sterowania ma postać kanoniczną obserwowalną

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = cx(t),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ...0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz $A$ w powyższej postaci kanonicznej obserwowalnej układu nazywa się również macierzą Frobeniusa. Postać kanoniczna obserwowalna jest użyteczna przy rozwiązywaniu zadania doboru macierzy K sprzężenia obserwatora i układu. Zdefiniujemy macierz K jako macierz kolumnową

$$K = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ ... \\ k_{n-2} \\ k_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy wtedy

$$\tilde{A} = A + Kc =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ ... \\ k_{n-2} \\ k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ...0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 + k_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 + k_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -a_2 + k_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{n-2} + k_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} + k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\tilde{a}_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -\tilde{a}_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\tilde{a}_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -\tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix},$$

gdzie $\tilde{a}_i \doteq a_i - k_i$. Tak więc po przekształceniach uzyskaliśmy macierz stanu znowu w postaci Frobeniusa. Jak wiadomo wielomiany charakterystyczne dla macierzy Frobeniusa A i $\tilde{A}$ zapisują się w postaci

$$det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_2 s^2 + a_1 s + a_0,$$

$$det(sI - \tilde{A}) = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + ... + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0.$$

Współczynniki $\tilde{a}_i$ wynikają z zadanych wartości własnych obserwatora. Tak więc elementy macierzy sprzężenia układu i obserwatora można łatwo wyznaczyć z zależności

$$k_i = a_i - \tilde{a}_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Łatwość wyznaczenia obserwatora układu w jego postaci kanonicznej obserwowalnej przesądza o dużej użyteczności praktycznej tej postaci. Pojawia się jednak problem sprowadzania ogólnego liniowego układu sterowania do postaci kanonicznej obserwowalnej.

Rozpatrzymy problem wyznaczania postaci kanonicznej obserwowalnej układu. Niech układ będzie opisywany liniowym równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

i równaniem wyjścia

$$y(t) = cx(t).$$

postać kanoniczną obserwowalną układu otrzymamy stosując przekształcenie liniowe wektora stanu

$$\tilde{x}(t) = Mx(t),$$

gdzie $M$ jest macierzą nieosobliwą. Podstawienie tego przekształcenia do równania stanu pozwala zapisać ciąg równości

$$\dot{\tilde{x}}(t) = M\dot{x}(t) = MAx(t) + MBu(t) = MAM^{-1}\tilde{x}(t) + MBu(t).$$

Tak więc dla układu przekształconego uzyskujemy równanie stanu

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t),$$

przy czym $\tilde{A} \doteq MAM^{-1}$ i $\tilde{B} = MB$. Natomiast równanie wyjścia układu przekształconego przybierze postać

$$y(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t),$$

gdzie

$$\tilde{c} \doteq cM^{-1}.$$

Zbadamy, czy zastosowanie liniowego przekształcenia wektora stanu nie wpływa na obserwowalność układu. W tym celu porównamy odpowiednie macierze obserwowalności

$$Q = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ ... \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{pmatrix}$$

oraz

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}\tilde{A} \\ ... \\ \tilde{c}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}\tilde{A} \\ ... \\ \tilde{c}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cM^{-1} \\ (cM^{-1})(MAM^{-1}) \\ ... \\ (cM^{-1})\underbrace{(MAM^{-1})(MAM^{-1})...(MAM^{-1})}_{n-1\ razy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cM^{-1} \\ cAM^{-1} \\ ... \\ cA^{n-1}M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ ... \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} M^{-1} = QM^{-1}$$

tj.

$$\tilde{Q} = QM^{-1}.$$

Ponieważ $M$ jest macierzą nieosobliwą, więc rzędy macierzy $\tilde{Q}$ i macierzy $Q$ są równe. Zatem rzeczywiście zastosowanie przekształcenia liniowego wektora stanu nie wpływa na obserwowalność układu. Wynika stąd także wniosek, że postać kanoniczną obserwowalną układu można uzyskać tylko dla układu obserwowalnego.

Rozwiążemy zadanie dobrania macierzy przekształcenia $M$ tak, aby uzyskać po przekształceniu

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

oraz

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ...0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla macierzy $M$ mamy zależność

$$\tilde{A}M = MA.$$

Wydzielimy wiersze macierzy $M$ w następujący sposób

$$M = \begin{pmatrix} m_{n-1} \\ ... \\ m_2 \\ m_1 \\ m_0 \end{pmatrix}$$

Na podstawie tego zapisu uzyskujemy równości

$$\tilde{A}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{n-1} \\ ... \\ m_2 \\ m_1 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 m_0 \\ m_{n-1} - a_1 m_0 \\ m_{n-2} - a_2 m_0 \\ ... \\ m_1 - a_{n-1} m_0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$MA = \begin{pmatrix} m_{n-1} \\ m_{n-2}... \\ m_2 \\ m_1 \\ m_0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} m_{n-1}A \\ m_{n-2}A \\ ... \\ m_1 A \\ m_0 A \end{pmatrix}$$

Przyrównując do siebie wyrażenia uzyskane dla $\tilde{A}M$ i $MA$ uzyskujemy układ równań

$$-a_0 m_0 = m_{n-1}A$$

$$m_{n-1} - a_1 m_0 = m_{n-2}A$$

$$m_{n-2} - a_2 m_0 = m_{n-3}A$$

$$...$$

$$m_1 - a_{n-1} m_0 = m_0 A$$

Uzyskana zależność pozwala na rekurencyjne obliczanie wierszy $m_i$: dla zadanej wartości początkowej $m_0$ obliczamy kolejno

$$m_1 = a_{n-1} m_0 + m_0 A$$

$$m_2 = a_{n-2} m_0 + m_1 A$$

$$...$$

$$m_{n-2} = a_2 m_0 + m_{n-3} A$$

$$m_{n-1} = a_1 m_0 + m_{n-2} A$$

Pozostała , nie wykorzystana zależność $-a_0 m_0 = m_{n-1}A$, jest spełniona, bo po prostych przekształceniach przyjmuje ona postać

$$a_0 m_0 + m_{n-1}A = a_0 m_0 + (a_1 m_0 + m_{n-2}A)A =$$

$$= a_0 m_0 + (a_1 m_0 + (a_2 m_0 + m_{n-3}A)A)A$$

$$= m_0(a_0 + a_1 A + a_2 A^2) + m_{n-3}A^3$$

$$= ... =$$

$$= m_0(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_{n-1}A^{n-1} + A^n) = 0,$$

a wyrażenie w nawiasie wyzerowuje się na podstawie twierdzenia Cayleya-Hamiltona: każda macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Poszukiwana macierz $M$ powinna także zapewniać założoną postać równania wyjścia, co oznacza, że

$$\tilde{c}M = c$$

czyli

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{n-1} \\ m_{n-2} \\ ... \\ m_1 \\ m_0 \end{pmatrix} = c$$

Wynika stąd, że $m_0 = c$ i obliczanie wierszy macierzy $M$ możemy przeprowadzić rekurencyjnie

$$m_0 = c$$

$$m_1 = a_{n-1}c + m_0 A$$

$$m_2 = a_{n-2}c + m_1 A$$

$$...$$

$$m_{n-1} = a_1 c + m_{n-2} A$$

Daje to w wyniku

$$m_0 = c$$

$$m_1 = cA + a_{n-1}c$$

$$m_2 = cA^2 + a_{n-1}cA + a_{n-2}c$$

$$...$$

$$m_{n-1} = cA^{n-1} + ... + a_3 cA^2 + a_2 cA + a_1 c$$

**Przykład**. Niech liniowy układ sterowania będzie opisywany równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zbadamy czy dany układ sterowania jest obserwowalny. Do tego celu wykorzystamy macierz

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$$

W wyniku kolejnych obliczeń otrzymujemy

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zatem

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Badamy rząd macierzy $Q$

$$detQ = det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

a więc $rankQ$=4, co oznacza, że rozpatrywany układ sterowania jest obserwowalny. Tak więc mimo tego, że dostępna do pomiaru jest tylko jedna spośród czterech współrzędnych stanu, istnieje możliwość otworzenia całego wektora stanu.

Wielomian charakterystyczny macierzy $A$ ma postać

$$det(sI-A)=det\begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0\\ -1 & s & 0 & 1\\ 0 & 0 & s & -1\\ 1 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}=s^4-s^2$$

Zapiszemy ten wielomian w postaci

$$det(sI-A)=s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

gdzie $a_3=0,\ a_2=-1,\ a_1=0,\ a_0=0.$

Wyznaczymy macierz przekształcenia liniowego pozwalającego uzyskać postać kanoniczną obserwowalną układu. Algorytm wyznaczania wierszy macierzy $M$ przybiera dla rozpatrywanego przykładu następują postać

$$m_0=c$$

$$m_1=a_3c+m_0A$$

$$m_2=a_2c+m_1A$$

$$m_3=a_1c+m_2A$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$m_0=c=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$m_1=a_3c+m_0A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$m_2=a_2c+m_1A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$m_3 = a_1 c + m_2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Macierz przekształcenia $M$ jest więc następująca

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Układ przekształcony ma postać kanoniczną obserwowalną

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \;\; y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t)$$

Wyznaczymy poszukiwany obserwator stanu na podstawie porównania wielomianów charakterystycznych układu wyjściowego i obserwatora.

Dla układu wyjściowego mamy

$$det(sI - A) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0,$$

gdzie $a_3 = 0, \; a_2 = -1, \; a_1 = 0, \; a_0 = 0$.

Dla obserwatora zadajemy wielomian charakterystyczny w postaci

$$det(sI - \tilde{A}) = (s+5)^4 = s^4 + \tilde{a}_3 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0,$$

gdzie $\tilde{a}_3 = 20, \; \tilde{a}_2 = 150, \; \tilde{a}_1 = 500, \; \tilde{a}_0 = 625$.

Wymagania postawione w stosunku do obserwatora oznaczają, że proces zanikania błędu odtwarzania powinien być nieoscylacyjny z szybkością zanikania co najmniej $Ct^3 e^{-5t}$.

Obliczamy pomocnicze współczynniki

$$\tilde{k}_i = a_i - \tilde{a}_i, \; i = 0, 1, 2, 3$$

i uzyskujemy macierz sprzężenia obserwatora układu przekształconego do postaci kanonicznej obserwowalnej

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -625 \\ -500 \\ -151 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Stosując macierz przekształcenia $M$ przejdziemy od macierzy stanu obserwatora układu przekształconego do macierzy stanu obserwatora układu wyjściowego

$$\tilde{A} + \tilde{K}\tilde{c} = MAM^{-1} + MKcM^{-1} = M(A + Kc)M^{-1},$$

co oznacza, że powrót do macierzy stanu obserwatora układu wyjściowego zapewnia związek między macierzami sprzężenia zwrotnego tych układów postaci

$$K = M^{-1}\tilde{K}.$$

Z zależności tej wyznaczamy macierz sprzężenia zwrotnego obserwatora stanu układu wyjściowego

$$K = M^{-1}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -625 \\ -500 \\ -151 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 520 \\ 776 \\ -20 \\ -151 \end{pmatrix}$$

Tak więc dla układu sterowania opisywanego równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = cx(t)$$

określiliśmy obserwator stanu opisywany równaniami

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + K(v(t) - y(t)), \quad v(t) = cz(t),$$

gdzie macierz sprzężenia zwrotnego między układem wyjściowym i obserwatorem została wyznaczona z wykorzystaniem transformacji układu wyjściowego do postaci kanonicznej obserwowalnej z macierzą stanu typu macierzy Frobeniusa.

Inaczej mówiąc z wyjściowym układem sterowania

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

wiążemy obserwator stanu opisywany równaniami

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 520 \\ 776 \\ -20 \\ -151 \end{pmatrix} (v(t) - z(t)),$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z(t),$$

który zapewnia odtwarzanie wektora stanu $x(t)$ układu wyjściowego przez wektor stanu obserwatora $z(t)$ z szybkością zanikania błędu $e(t) = z(t) - x(t) \approx Ct^3 e^{-5t}$.

**Zastosowanie obserwatora stanu do stabilizacji układu przez sprzężenie zwrotne od odtworzonego wektora stanu**

Stabilizację układów sterowania można w wielu przypadkach osiągnąć poprzez zastosowanie sprzężenia zwrotnego od wektora stanu. Jeśli jednak nie wszystkie zmienne stanu są dostępne, to taka stabilizacja może nie być skuteczna. W tym przypadku nasuwa się pomysł wykorzystania obserwatora stanu. Ponieważ odtworzony wektor stanu obarczony jest błędem, więc należy sprawdzić skuteczność tej ostatniej stabilizacji.

W układzie stabilizacji z obserwatorem stanu dla sterowania układu wyjściowego zapisujemy zależność

$$u(t) = \mathcal{K}z(t),$$

przy czym $\mathcal{K}$ jest macierzą sprzężenia zwrotnego od odtworzonego wektora stanu w odróżnieniu od macierzy $K$ sprzężenia obserwatora. Tak więc równanie stanu układu wyjściowego przybierze postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\mathcal{K}z(t).$$

Natomiast równanie stanu obserwatora zapiszemy w postaci

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + K(v(t) - y(t)) = Az(t) + Bu(t) + KC(z(t) - x(t)).$$

Wykorzystując błąd odtwarzania

$$e(t) = z(t) - x(t)$$

przedstawimy powyższe równania jako równania stanu dla wektora $(x^T(t), e^T(t))^T$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\mathcal{K}z(t) = Ax(t) + B\mathcal{K}(e(t) + x(t)) = (A + B\mathcal{K})x(t) + B\mathcal{K}e(t),$$

$$\dot{e}(t) = \dot{z}(t) - \dot{x}(t) = Az(t) + Bu(t) + KC(z(t) - x(t)) - (Ax(t) + Bu(t)) = (A + KC)e(t).$$

Łączny zapis tych równań daje w wyniku

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B\mathcal{K} & B\mathcal{K} \\ 0 & A + KC \end{pmatrix} u(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}$$

Oznacza to, że równanie charakterystyczne układu stabilizacji z obserwatorem jest następujące

$$det(sI - (A + B\mathcal{K}))det(sI - (A + KC)) = 0.$$

Zgodnie z otrzymaną zależnością zbiór pierwiastków wielomianu charakterystycznego układu stabilizacji z obserwatorem składa się z pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy $A + B\mathcal{K}$ oraz z pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy $A + KC$. Dla układu sterowalnego i obserwowalnego możemy za pomocą doboru macierzy $\mathcal{K}$ i $K$ uzyskać zadane położenie pierwiastków rozpatrywanych wielomianów w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Wtedy jedynym punktem równowagi układu stabilizacji z obserwatorem jest punkt zerowy i jest on asymptotycznie stabilny. Tak więc układ realizuje zadanie stabilizacji zerowego punktu równowagi układu wyjściowego i równocześnie zapewnia zanikanie błędu odtwarzania jego wektora stanu.

**Obserwator układu sterowania przy zakłóceniach o znanych statystykach**

Rozważmy liniowy niestacjonarny układ sterowania poddany zakłóceniom w postaci białego szumu, opisany równaniami

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + W_1(t), \quad (\star)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + W_2(t),$$

przy czym $X(t)$ jest $n$-wymiarowym wektorem stanu, $U(t)$ jest $m$-wymiarowym wektorem sterowania, $Y(t)$ jest $p$-wymiarowym wektorem wyjść, a $W_1(t)$ i $W_2(t)$ są wektorowymi białymi szumami o wymiarach odpowiednio $n$ i $p$.

Niech

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{pmatrix}.$$

Założymy, że szumy $W_1(t)$ i $W_2(t)$ są nieskorelowane, a ich macierz intensywności jest postaci

$$V(t) = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ O & V_2(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $V_1(t)$, $V_2(t)$ są odpowiednio intensywnościami $W_1(t)$ i $W_2(t)$. Założymy, że $V_2(t)$ jest macierzą dodatnio określoną tj.

$$V_2(t) > 0, \ \ t \geq 0.$$

Niech $m_{X_0}$ oznacza wartość oczekiwaną wektora stanu $X(t)$ w chwili początkowej $t_0$:

$$m_{X_0} = E[X(t_0)]$$

i niech $W_{X_0}$ oznacza macierz wariancji tego wektora:

$$W_{X_0} = E\{[X(t_0) - m_{X_0}][X(t_0) - m_{X_0}]^T\}.$$

Do danego układu dołączamy obserwator opisany niestacjonarnym równaniem stanu

$$\dot{Z}(t) = A_0(t)Z(t) + B_0(t)U(t) + B_1(t)Y(t),$$

przy czym $Z(t)$ jest $n$-wymiarowym wektorem stanu obserwatora, a

$$A_0(t),\ B_0(t),\ B_1(t)$$

są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times n,\ n \times m,\ n \times p$. Macierze te dobierzemy na podstawie równości

$$A_0(t) = A(t) - K(t)C(t),\ \ B_0(t) = B(t),\ \ B_1(t),$$

przy czym $K(t)$ jest dowolną macierzą niestacjonarną. Uwzględniając te zależności przekształcamy równanie obserwatora do postaci

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) + B(t)U(t) + K(t)(y(t) - CX(t)). \quad (\star\star)$$

Niech

$$E(t) = X(t) - Z(t)$$

będzie błędem (uchybem) odtwarzania wektora stanu $X(t)$ przez rozpatrywany obserwator.

Jakość odtwarzania wektora stanu przez obserwator oceniać będziemy za pomocą wskaźnika jakości o postaci

$$J \doteq \mathcal{E}[E^T(t)Q(t)E(t)],$$

przy czym $Q(t)$ jest dodatnio określoną macierzą wag, zaś $\mathcal{E}$ jest operatorem wartości oczekiwanej. Zadanie doboru obserwatora formułujemy w ten sposób, że należy określić stan początkowy obserwatora $Z(t_0)$ oraz macierz $K(t)$ tak, aby wskaźnik jakości $J$ osiągał minimum.

**Twierdzenie:** Stan początkowy obserwatora $Z(t_0)$ i macierz $K(t)$ obserwatora zapewniające minimum wskaźnika jakości $J$ są określone zależnościami

$$Z(t_0) = m_{X_0},$$

$$K(t) = W_E(t)C^T(t)V_2^{-1}(t) \ \ (t \geq t_0),$$

przy czym pomocnicza macierz $W_E(t)$ jest rozwiązaniem równania Riccatiego o postaci

$$\dot{W}_E(t) = A(t)W_E(t) + W_E(t)A^T(t) - W_E(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)W_E(t) + V_1(t) \ \ (t \geq t_0),$$

z warunkiem początkowym

$$W_E(t_0) = W_{X_0}.$$

**Dowód:**

Przepiszemy równanie obserwatora w postaci

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) + B(t)U(t) + K(t)(C(t)X(t) + W_2(t) - C(t)Z(t))$$

i odejmiemy je od równania danego układu

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + W_1(t)$$

uzyskując

$$\dot{X}(t) - \dot{Z}(t) = (A(t) - K(t)C(t))(X(t) - Z(t)) + W_1(t) - K(t)W_2(t).$$

Oznacza to, że błąd odtwarzania wektora stanu spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{E}(t) = (A(t) - K(t)C(t))E(t) + (I \;\; - K(t))W(t)$$

z warunkiem początkowym

$$E(t_0) = X(t_0) - Z(t_0).$$

Wykażemy, że wskaźnik jakości odtwarzania wektora stanu można przekształcić do postaci

$$J = \mathcal{E}\{E^T(t)Q(t)E(t)\} = m_E^T(t)Q(t)m_E(t) + tr(\tilde{W}_E(t)Q(t)),$$

przy czym $m_E(t)$ jest wartością oczekiwaną $E(t)$, $\tilde{W}_E(t)$ jest macierzą wariancji $E(t)$, a $tr$ oznacza ślad macierzy. Oznaczając

$$E(t) = E_0(t) + m_E(t), \;\; E_0(t) = E(t) - m_E(t),$$

możemy przekształcić wyrażenie dla wskaźnika jakości jak następuje

$$\begin{gathered} J = \mathcal{E}\{(E_0(t) + m_E(t))^T Q(t)(E_0(t) + m_E(t))\} \\ = \mathcal{E}\{E_0^T(t)Q(t)E_0(t)\} + m_E^T(t)Q(t)\mathcal{E}\{E_0(t)\}+ \\ \mathcal{E}\{E_0^T(t)\}Q(t)m_E(t) + \mathcal{E}\{m_E^T(t)Q(t)m_E(t)\} \\ = \mathcal{E}\{E_0^T Q(t)E_0(t)\} + m_E^T(t)Q(t)m_E(t), \end{gathered}$$

gdyż

$$\mathcal{E}\{E_0(t)\} = 0, \;\; \mathcal{E}\{m_E^T(t)Q(t)m_E(t)\} = m_E^T(t)Q(t)m_E(t).$$

Niech $q_{ij}(t)$ oznacza element macierzy $Q(t)$ położony w $i$-tym wierszu i $j$-tej kolumnie, a $E_{0i}(t)$ - $i$-tą składową wektora $E_0(t)$. Stosując te oznaczenia możemy napisać

$$\mathcal{E}\{E_0^T(t)Q(t)E_0(t)\} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{E}\{q_{ij}(t)E_{0i}(t)E_{0j}(t)\}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(t)\mathcal{E}\{E_{0i}(t)E_{0j}(t)\} = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(t)\tilde{W}_{E_{ij}}(t) = tr(\tilde{W}_E(t)Q(t)),$$

przy czym $\tilde{W}_{E_{ij}}(t) = \mathcal{E}\{E_{0i}(t)E_{0j}(t)\}$ jest $(i,j)$-tym elementem macierzy $\tilde{W}_E(t)$. Tak więc wskaźnik jakości jest sumą dwóch składowych

$$J = J_1 + J_2,$$

gdzie

$$J_1 = m_E^T(t)Q(t)m_E(t), \quad J_2 = tr(\tilde{W}_E(t)Q(t)).$$

Składowa $J_1$ jako dodatnio określona forma kwadratowa osiąga minimum dla $m_E(t) = 0$. Wykażemy, że zachodzi to w przypadku, gdy $Z(t_0) = m_{X_0}$. Równanie różniczkowe dla uchybu odtwarzania stanu poddamy działaniu operatora wartości oczekiwanej uzyskując

$$\dot{m}_E(t) = (A(t) - K(t)C(t))m_E(t),$$

gdyż

$$\mathcal{E}\{\dot{m}_E(t)\} = \dot{m}_E(t), \quad \mathcal{E}\{W(t)\} = 0.$$

Z definicji uchybu odtwarzania stanu $E(t) = X(t) - Z(t)$ wynika, że $m_E(t_0) = m_{X_0} - m_{X_0} = 0$. Wielkość $m_E(t) = 0$ również dla $t > 0$, ponieważ jest ona rozwiązaniem liniowego autonomicznego równania różniczkowego z zerowym warunkiem początkowym.

Do minimalizacji składnika $J_2$ zastosujemy znaną z teorii procesów stochastycznych własność macierzy wariancji procesu stochastycznego $X(t)$ będącego rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)W(t).$$

Macierz wariancji $W_X(t)$ procesu $X(t)$ spełnia równanie różniczkowe o postaci

$$\dot{W}_X(t) = A(t)W_X(t) + W_X(t) + W_X(t)A^T(t) + B(t)V(t)B^T(t)$$

z warunkiem początkowym

$$W_X(t_0) = W_{X_0}.$$

Z zastosowania tego twierdzenia do równania różniczkowego dla uchybu odtwarzania stanu wynika, że macierz wariancji $\tilde{W}_E(t)$ uchybu $E(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\tilde{W}}_E(t) = (A(t) - K(t)C(t))\tilde{W}_E(t) + \tilde{W}_E(t)(A(t) - K(t)C(t))^T +$$

$$+\begin{pmatrix} I & -K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ O & V_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -K^T(t) \end{pmatrix} =$$

$$= (A(t)-K(t)C(t))\tilde{W}_E(t)+\tilde{W}_E(t)(A(t)-K(t)C(t))^T+V_1(t)+K(t)V_2(t)K^T(t)$$

z warunkiem początkowym

$$\tilde{W}_E(t_0) = W_{X_0}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$(A(t) - K(t)C(t)) = (A^T(t) - C^T K^T(t))^T,$$

dokonując zamiany $t$ na $t^* - t$ i podstawiając $\tilde{W}_E(t) = \tilde{P}(t^* - t)$ $(t^* = t_0 + t_k)$. możemy równanie dla wariancji uchybu napisać w postaci

$$-\dot{\tilde{P}}(t) = (A^T(t^* - t) - C^T(t^* - t)K^T(t^* - t))^T \tilde{P}(t) +$$

$$\tilde{P}(t)(A^T(t^* - t) - C^T(t^* - t)K^T(t^* - t)) +$$

$$+V_1(t^* - t) + K(t^* - t)V_2(t^* - t)K^T(t^* - t) \quad (t \le t_k),$$

a warunek początkowy zastąpić warunkiem końcowym

$$\tilde{P}(t_k) = W_{X_0}.$$

Wykażemy, że forma kwadratowa

$$F(t) = x^T(t)\tilde{P}(t)x(t)$$

określona za pomocą macierzy $\tilde{P}(t)$ będącej rozwiązaniem ostatniego równania różniczkowego przybiera wartość minimalną, gdy

$$K^T(t^* - t) = V_2^{-1}(t^* - t)C(t^* - t)P(t),$$

przy czym $P(t)$ jest rozwiązaniem równania Riccatiego o postaci

$$-\dot{P}(t) = P(t)A^T(t^* - t) + A(T^* - t)P(t) + V_1(t^* - t) -$$

$$P(t)C^T(t^* - t)V_2^{-1}(t^* - t)C(t^* - t)P(t) \quad (t \leq T_k),$$

z warunkiem końcowym

$$P(t_k) = W_{X_0}.$$

Rozważmy obiekt opisany równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = A^T(t^* - t)x(t) + C^T(t^* - t)u(t)$$

objęty ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$u(t) = -K^T(t^* - t)x(t)$$

oraz wskaźnik jakości o postaci

$$I(t) = \int_t^{t_k} (x^T(\tau)V_1(t^* - t)x(\tau) + u^T(\tau)V_2(t^* - t)u(\tau))d\tau + x^T(t_k)W_{X_0}x(t_k).$$

Dla obiektu ze sprzężeniem zwrotnym równanie stanu przybierze postać

$$\dot{x}(t) = (A^T(t^* - t) - C^T(t^* - t)K^T(t^* - t))x(t),$$

a wskaźnik jakości można zapisać jako

$$I(t) = \int_t^{t_k} (x^T(\tau)(V_1(t^* - t) + K(t^* - t)V_2(t^* - t)K^T(t^* - t))x(\tau)d\tau + x^T(t_k)W_{X_0}x(t_k).$$

Wykażemy, że wskaźnik jakości $I(t)$ jest równy formie kwadratowej $F(t)$ będącej rozwiązaniem równania różniczkowego dla $\tilde{P}(t)$ z zadanym warunkiem końcowym. Różniczkując wskaźnik jakości $I(t)$ otrzymujemy

$$\dot{I}(t) = -x^T(t)(V_1(t^* - t) + K(t^* - t)V_2(t^* - t)K^T(t^* - t))x(t).$$

Z kolei różniczkując formę kwadratową $F(t)$ uzyskujemy

$$\dot{F}(t) = \dot{x}^T(t)\tilde{P}(t)x(t) + x^T\dot{\tilde{P}}(t)x(t) + x^T(t)\tilde{P}(t)\dot{x}(t) =$$

$$= x^T(t)\big((A^T(t^* - t) - C^T(t^* - t)K^T(t^* - t))^T\tilde{P}(t) +$$

$$\dot{\tilde{P}}(t) + \tilde{P}(t)(A^T(t^* - t) - C^T(t^* - t)K^T(t^* - t))\big)x(t).$$

Przyrównując do siebie powyższe pochodne, a co za tym idzie formy kwadratowe po prawej stronie równań uzyskujemy równanie różniczkowe dla $\tilde{P}(t)$, a warunek końcowy dla tej wielkości wynika z wyrażenia dla $I(t_k)$. Z określenia pomocniczego obiektu sterowania i jego wskaźnika jakości wynika, że optymalne rozwiązanie problemu LKSO dla tego obiektu jest reprezentowane przez macierz $K^T(t^* - t)$ , a co za tym idzie przez macierz $P(t)$ będącą rozwiązaniem równania Riccatiego przy zadanym warunku końcowym. Równanie różniczkowe dla $\tilde{P}(t)$ po podstawieniu zależności dla $K^T(t^* - t)$ przybiera postać równania dla $P(t)$. Wynika stąd, że

$$\tilde{P}(t) \geq P(t) \ \ (t \in [t_0, t_k]).$$

Podobnie z porównania równań dla $\tilde{W}(t)$ i $W_E(t)$ wynika, że

$$\tilde{W}_E(t) \geq W_E(t) \ \ (t \in [t_0, t_k]), \ \ tr(\tilde{W}_E(t)Q(t)) \geq tr(W_E(t)Q(t)).$$

Oznacza to, że macierz $K(t)$ określona w twierdzeniu zapewnia minimum wskaźnika jakości $J$. $\square$

Z powyższych rozważań wynika następujący **algorytm syntezy optymalnego obserwatora przy zakłóceniach o znanych statystykach**:

1) Mając dane macierze $A(t),\ C(t), V_1(t),\ V_2(t)$ i $W_{X_0}$ określamy równanie Riccatiego dla $W_E(t)$ z zerowym warunkiem początkowym.

2) Stosując jedną z numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych Riccatiego wyznaczamy macierz $W_E(t)$.

3) Określamy macierz $K(t)$ optymalnego obserwatora z zależności $K(t) = W_E(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)$.

**Przykład:** Niech będzie dany liniowy obiekt sterowania opisany równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} U(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} W_1(t),$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + W_2(t),$$

gdzie $W_1(t)$ i $W_2(t)$ są skalarnymi nieskorelowanymi białymi szumami o tej samej stałej niezależnej od czasu intensywności $V$. Określamy równanie Riccatiego dla pomocniczej macierzy $W_E(t)$

$$\dot{W}_E(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} W_E(t) + W_E(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & V \end{pmatrix} - W_E(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} W_E(t),$$

przy czym

$$W_E(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) \end{pmatrix}$$

oraz

$$W_E(0) = 0.$$

W tym przypadku macierz $K(t)$ optymalnego obserwatora redukuje się do macierzy kolumnowej

$$K(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) \\ w_{21}(t) \end{pmatrix} V^{-1}.$$