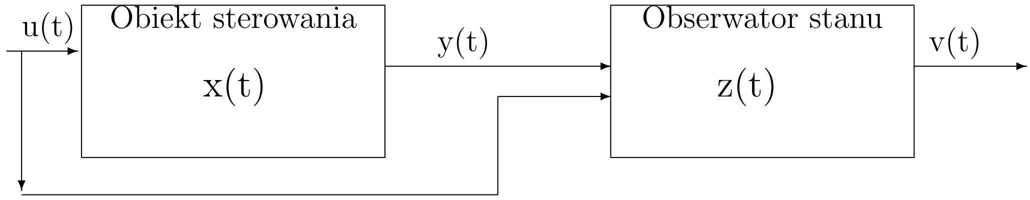
Algorytmy syntezy układów sterowania

Literatura: T. Kaczorek, Teoria sterowania, t.1 i 2, PWN, W-wa 1980; T. Kaczorek, Teoria sterowania i systemów, PWN, W-wa, 1996.

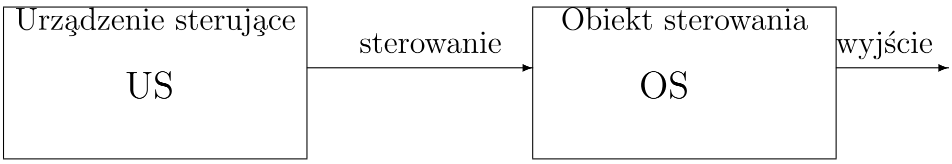


Niech będzie dany układ sterowania taki, że nie wszystkie jego zmienne stanu są bezpośrednio dostępne (mierzalne). Układ pozwalający odtworzyć na podstawie znajomości sterowania i wyjścia niedostępne zmienne stanu nazywa się **obserwatorem stanu**.

Stabilizowalność układów sterowania. Dobór sprzężenia zwrotnego

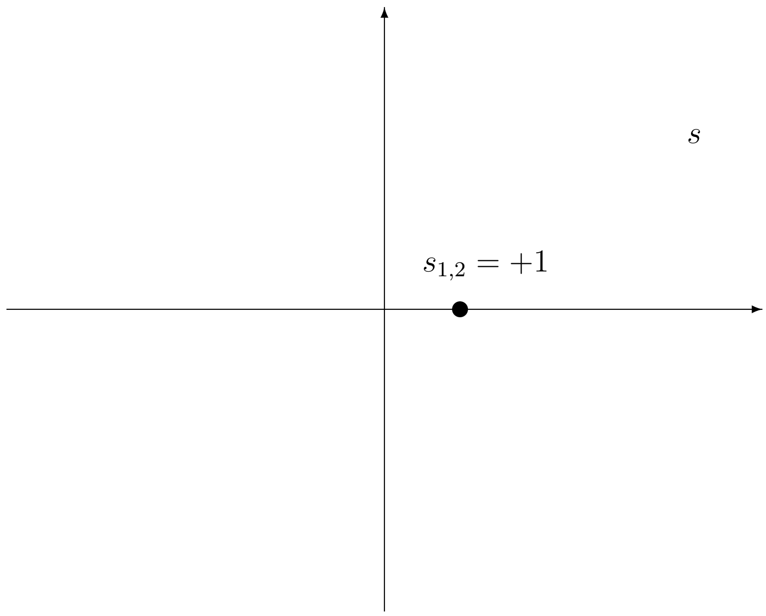
Niestabilny otwarty układ sterowania opisywany równaniami stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$



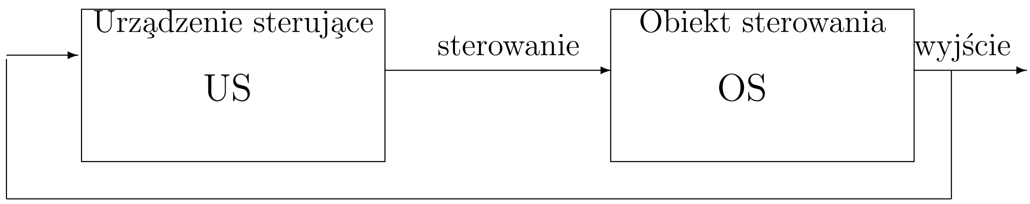
Równanie wartości własnych macierzy stanu układu otwartego: $det(sI - A) = 0 \Rightarrow (s-1)^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = 1$. Dwukrotna wartość własna w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s implikuje niestabilność układu otwartego.

Dwukrotna dodatnia wartość własna układu sterowania



Stosujemy sprzężenie zwrotne

$$u(t) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} y(t)$$



i wyznaczamy macierz stanu układu zamkniętego ze sprzężeniem zwrotnym

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t),\ y(t) = Cx(t),\ u(t) = Ky(t)\ \Rightarrow \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t),\ \tilde{A} = A+BKC,$$

tj

$$A + BKC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -1 & 2 - k_2 \end{pmatrix}.$$

Równanie wartości własnych układu zamkniętego przybiera postać

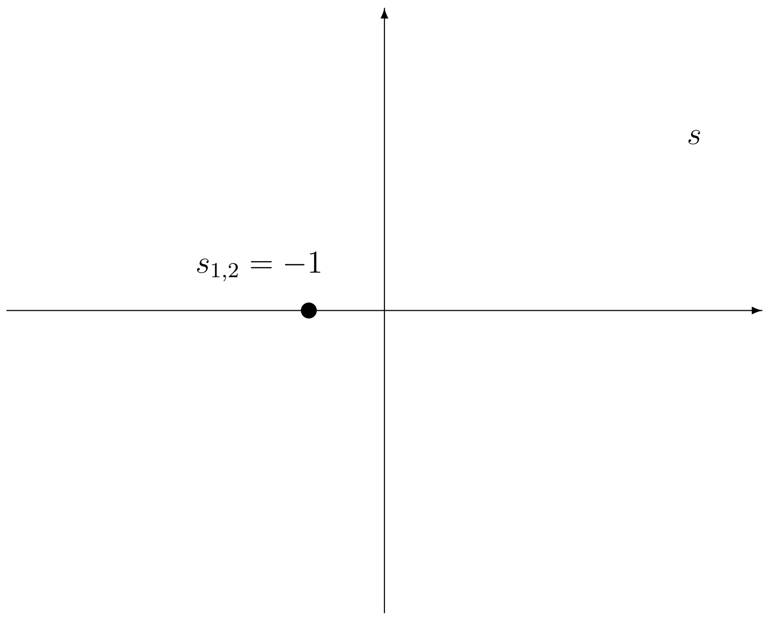
$$det(sI - \tilde{A}) = s^2 + (k_1 + k_2 - 2)s + k_1(k_2 - 2) + 1 = 0,$$

a warunki jego stabilności są następujące

$$k_1 + k_2 - 2 > 0, \quad k_1(k_2 - 2) + 1 > 0.$$

Dla $k_1 = 0$ i $k_2 = 4$ wartości własne układu zamkniętego są postaci $s_{1,2} = -1$. Układ zamknięty jest stabilny ze stopniem stabilności $\eta = 1$. Procesy przejściowe zanikają w układzie nie wolniej niż Cte^{-t}.

Dwukrotna ujemna wartość własna układu sterowania



Dla $k_1 = 2$ i $k_2 = 4$ wartości własne układu zamkniętego są postaci$s_{1,2} = -2 \pm \jmath$. Układ zamknięty jest stabilny ze stopniem stabilności $\eta = 2$. Procesy przejściowe zanikają w układzie nie wolniej niż Ce^{-2t}. Pojawiają się jednak przebiegi oscylacyjne z oscylacyjnością

$$\mu \doteq \max_{1 \le i \le n} |Im(s_i)|/|Re(s_i)| = 0.5.$$

Chcąc zapewnić duży stopień stabilności i małą oscylacyjność układu sterowania analizujemy zagadnienie przesuwania wartości własnych macierzy stanu układu.

Przesuwanie wartości własnych macierzy stanu układu

Wektor stanu i wektor sterowania mają taki sam wymiar

Pierwotny układ sterowania zaprojektowany na podstawie fizyko-chemicznego modelu obiektu sterowania i informacji o zadaniu sterowania, jakie stawiane jest w odniesieniu do danego obiektu, może nie wykazywać dobrych własności dynamicznych. Mała zmiana parametrów układu powoduje utratę jego stabilności (układ ma mały stopień stabilności), w układzie obserwowane są szkodliwe dla układu przebiegi oscylacyjne o dużej amplitudzie i częstotliwości, a wielkość zadająca (jeśli układ ma cechy układu śledzącego) jest odtwarzana na wyjściu układu z małą dokładnością.

W związku z tym nasuwa się pytanie, jak zmodyfikować układ sterowania opisywany równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^n,$$

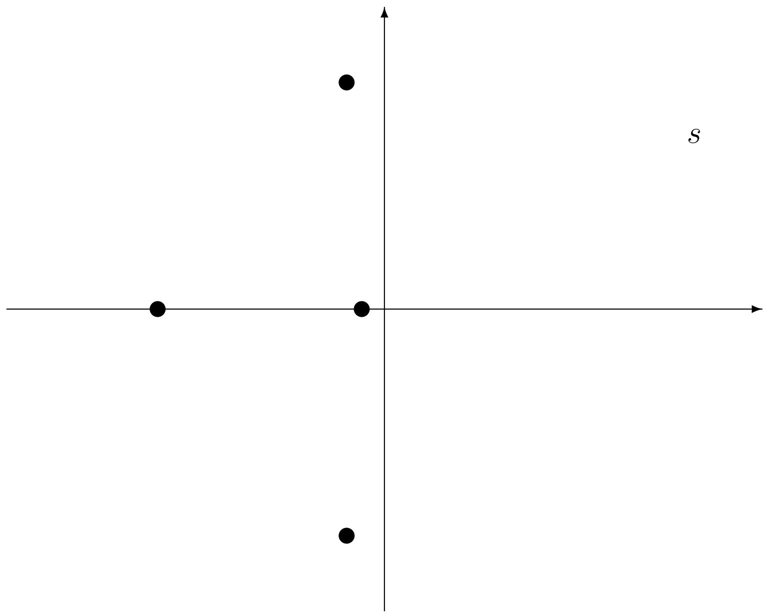
aby poprawić jego własności dynamiczne. Rozważymy zadanie modyfikacji układu sterowania przy następujących założeniach:

- macierz sterowania B jest nieosobliwa,
- wszystkie składowe wektora stanu są dostępne tj. $C = I$,
- wartości własne $s_1, ..., s_n$ macierzy stanu A są jednokrotne.

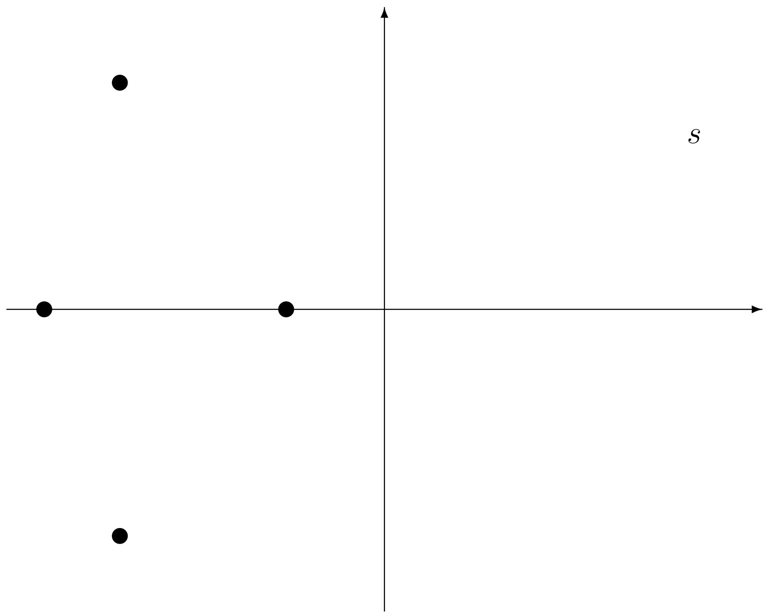
Oczywiście rozważany układ jest sterowalny i obserwowalny. Należy tak zmodyfikować pierwotny układ sterowania, aby wartości własne macierzy stanu układu zmodyfikowanego miały z góry zadane wartości

$$s_1^M, s_2^M, ..., s_n^M.$$

Wartości własne macierzy stanu
pierwotnego układu sterowania



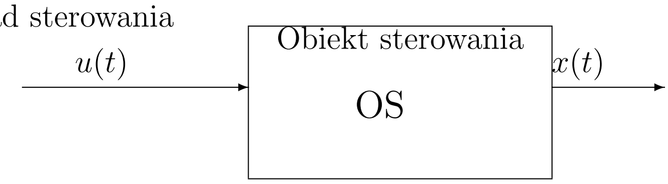
Wartości własne macierzy stanu
zmodyfikowanego układu sterowania



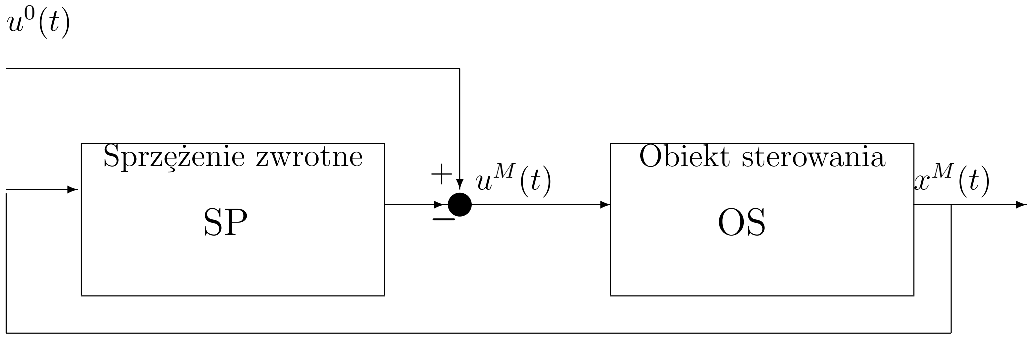
Układ pierwotny ma mały zapas stabilności i dużą oscylacyjność. Układ zmodyfikowany ma zwiększony zapas stabilności i zmniejszoną oscylacyjność.

Modyfikacja układu sterowania będzie polegać na wprowadzeniu ujemnego sprzężenia zwrotnego i nowego sterowania $u^0(t) \in R^n$ pozwalającego zachować funkcję sterowniczą układu. Jeśli wyeliminować całkowicie sterowanie z układu determinując jego przebieg za pomocą sprzężenia zwrotnego, to układ staje się układem autonomicznym, który sam określa ewolucję swojej dynamiki.

Pierwotny układ sterowania



Zmodyfikowany układ sterowania



Dla układu zmodyfikowanego uzyskujemy równania

$$\dot{x}^M(t) = Ax^M(t) + Bu^M(t), \;\; u^M(t) = u^0(t) - K_{sp}x^M(t), \;\; (*),$$

gdzie $K_{sp} \in R^{n \times n}$ jest poszukiwaną macierzą sprzężenia zwrotnego od stanu do sterowania.

Po oznaczeniu

$$u_B^M(t) \doteq Bu^M(t)$$

równanie (*) przyjmie postać

$$\dot{x}^M(t) = Ax^M(t) + u_B^M(t).$$

Stosujemy przekształcenie diagonalizujące

$$x^M(t) = P\tilde{x}^M(t),$$

gdzie macierz P jest utworzona z wektorów własnych macierzy A. Dla $\tilde{x}^M(t)$ uzyskujemy równanie

$$\dot{\tilde{x}}^M(t) = P^{-1}AP\tilde{x}^M(t) + P^{-1}u_B^M(t)$$

tj.

$$\dot{\tilde{x}}^M(t) = diag_{1\le i\le n}(s_i)\tilde{x}^M(t) + \tilde{u}_B^M(t), \;\; \tilde{u}_B^M(t) \doteq P^{-1}u_B^M(t), \;\; (**).$$

Narzucamy na wielkość $\tilde{u}_B^M(t)$ warunek

$$\tilde{u}_B^M(t) = P^{-1}Bu^0(t) - diag_{1\le i\le n}(\tilde{s}_i^M)\tilde{x}^M(t), \;\; (***).$$

Po podstawieniu do równania (**) mamy

$$\dot{\tilde{x}}^M(t) = diag_{1\le i\le n}(s_i - \tilde{s}_i^M)\tilde{x}^M(t) + P^{-1}Bu^0(t).$$

Ponieważ chcemy, aby macierz stanu układu zmodyfikowanego miała wartości własne s_i^M, więc musi być $s_i - \tilde{s}_i^M = s_i^M$ tj. $\tilde{s}_i^M = s_i - s_i^M, \; i = 1, ..., n.$

Tak więc

$$\dot{\tilde{x}}^M(t) = diag_{1\le i\le n}(s_i^M)\tilde{x}^M(t) + P^{-1}Bu^0(t).$$

Biorąc pod uwagę zależność $\tilde{x}^M(t) = P^{-1}x^M(t)$ mamy

$$P^{-1}\dot{x}^M(t) = diag_{1\le i\le n}(s_i^M)P^{-1}x^M(t) + P^{-1}Bu^0(t).$$

i

$$\dot{x}^M(t) = Pdiag_{1\le i\le n}(s_i^M)P^{-1}x^M(t) + Bu^0(t).$$

Natomiast dla wyrażenia $u_B^M(t)$ mamy

$$u_B^M(t) = P\tilde{u}_B^M(t)$$

i z warunku (***) uzyskujemy

$$u_B^M(t) = Bu^0(t) - Pdiag_{1\le i\le n}(\tilde{s}_i^M)\tilde{x}^M(t),$$

$$u_B^M(t) = Bu^0(t) - Pdiag_{1\le i\le n}(\tilde{s}_i^M)P^{-1}x^M(t),$$

$$Bu^M(t) = Bu^0(t) - Pdiag_{1\le i\le n}(\tilde{s}_i^M)P^{-1}x^M(t)$$

i ostatecznie

$$u^M(t) = u^0(t) - B^{-1} P diag_{1 \leq i \leq n}(\tilde{s}_i^M) P^{-1} x^M(t).$$

Porównując to wyrażenie z wyjściowym równaniem dla sterowania $u^M(t)$ wnioskujemy, że

$$K_{sp} = B^{-1} P diag_{1 \leq i \leq n}(\tilde{s}_i^M) P^{-1}, \quad (* * **).$$

Z powyższego rozumowania wynika następujący

Algorytm syntezy zmodyfikowanego układu sterowania:

• określić macierz diagonalną z elementami $\tilde{s}_i^M = s_i - s_i^M$,

• wyznaczyć przekształcenie diagonalizujące P dla macierzy stanu A i jego odwrotność P^{-1},

• obliczyć macierz odwrotną B^{-1},

• wyznaczyć poszukiwaną macierz sprzężenia zwrotnego ze wzoru (****).

Przykład: Pierwotny układ sterowania opisywany jest równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u(t).$$

Wartości własne macierzy stanu A układu pierwotnego określone przez równanie

$$det(sI - A) = s^2 + 7s + 12 = 0$$

są równe $s_1 = -3, \ s_2 = -4$.

Stosując sprzężenie zwrotne w funkcji wektora stanu należy układ zmodyfikować tak, aby uzyskać wartości własne macierzy stanu układu zmodyfikowanego równe $s_1 = -5, \ s_2 = -7$.

Obliczamy pomocniczą macierz diagonalną $diag_{1 \leq i \leq n}(\tilde{s}_i^M) = diag(2, 3)$.

Znajdujemy przekształcenie diagonalizujące macierzy A z równań dla jej wektorów własnych

$$(s_1 I - A) P_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \end{pmatrix} = 0$$

oraz

$$(s_2 I - A) P_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2^1 \\ P_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

Stąd

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Określamy macierz

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oraz macierz sprzężenia zwrotnego

$$K_{sp} = B^{-1} P diag_{1 \le i \le n}(\tilde{s}_i^M) P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Synteza jednowymiarowego wejściowo-wyjściowego układu sterowania o zadanych biegunach i zerach

Niech będzie dany jednowymiarowy wejściowo-wyjściowy układ sterowania opisywany transmitancją

$$G_0(s) = \frac{L_0(s)}{M_0(s)},$$

gdzie

$$L_0(s) = c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + ... + c_1 s + c_0, \quad M_0(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0.$$

Inaczej mówiąc jednowymiarowy wejściowo-wyjściowy układ sterowania opisywany jest równaniem różniczkowym n-tego rzędu

$$c_{n-1}u^{n-1}(t) + c_{n-2}u^{n-2}(t) + ... + c_1 u(t) + c_0 = a_n y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + ... + a_1 y(t) + a_0.$$

Przechodzimy do opisu układu w przestrzeni stanu zachowując sterowanie pierwotne

$$u(t) \doteq u(t)$$

i wybierając w charakterze zmiennych stanu wielkości

$$x_1(t) \doteq y(t),\ x_2(t) \doteq y^{(1)}(t),\ ...,\ x_n(t) \doteq y^{(n-1)}(t),$$

a w charakterze zmiennych wyjściowych wielkości

$$y_1(t) \doteq y(t),\ y_2(t) \doteq y^{(1)}(t), ..., y_{n-1}(t) \doteq y^{(n-1)}.$$

Opis układu w przestrzeni stanu przybierze postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ \ y(t) = cx(t),$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Macierz A w powyższym opisie jest tzw. macierzą Frobeniusa, a macierz stanu tej postaci nazywa si postacią kanoniczną sterowalną.

Opis układu za pomocą transmitancji operatorowej $G_0(s)$ jest związany z opisem w przestrzeni stanu zależnością

$$G_0(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{c((sI - A)_{ad}b}{det(sI - A)}.$$

Z porównania opisów wynika, że

$$L_0(s) = c(sI - A)_{ad}b,\ \ M_0(s) = det(sI - A).$$

Zakładamy dostępność wszystkich zmiennych stanu i poszukujemy sprzężenia zwrotnego od stanu do sterowania określonego macierzą wierszową

$$k_{sp} = (k_{1sp}, k_{2sp}, ..., k_{nsp})$$

oraz połączenia równoległego na wyjściu określonego macierzą wierszową

$$k_r = (k_{1r}, k_{2r}, ..., k_{nr}).$$

Układ zmodyfikowany jest opisany w przestrzeni stanu równaniami

$$\dot{x}^M(t) = Ax^M(t) + bu^M(t),\ \ u^M(t) = u^0(t) - k_{sp}x^M(t),\ \ y(t) = (c + k_r)x^M(t),$$

przy czym $u^0(t)$ jest nowym sterowaniem zewnętrznym. Oznaczmy transmitancję operatorową układu zmodyfikowanego jako

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie

$$L(s) = \tilde{c}_{n-1}s^{n-1} + \tilde{c}c_{n-2}s^{n-2} + ... + \tilde{c}_1 s + \tilde{c}_0, \quad M(s) = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + ... + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0.$$

Należy tak dobrać macierz sprzężenia zwrotnego i połączenia równoległego, aby bieguny

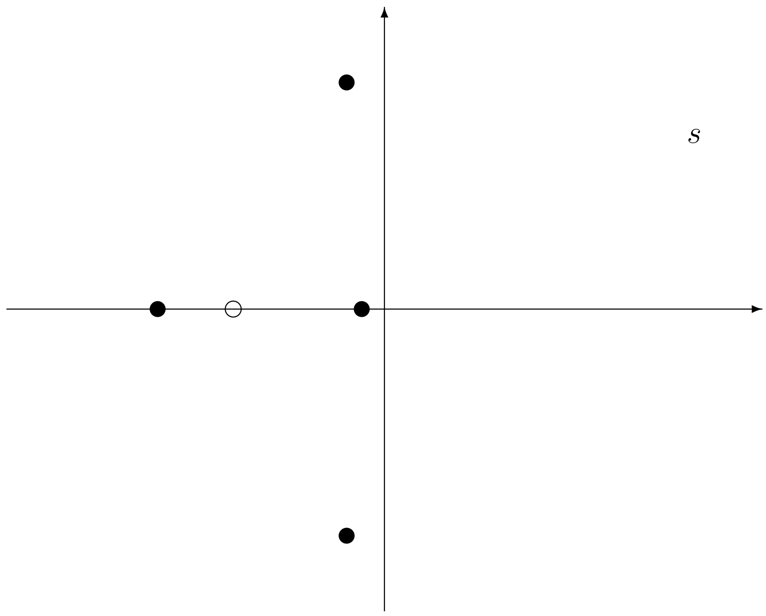
$$s_1^M, s_2^M, ..., s_n^M$$

i zera

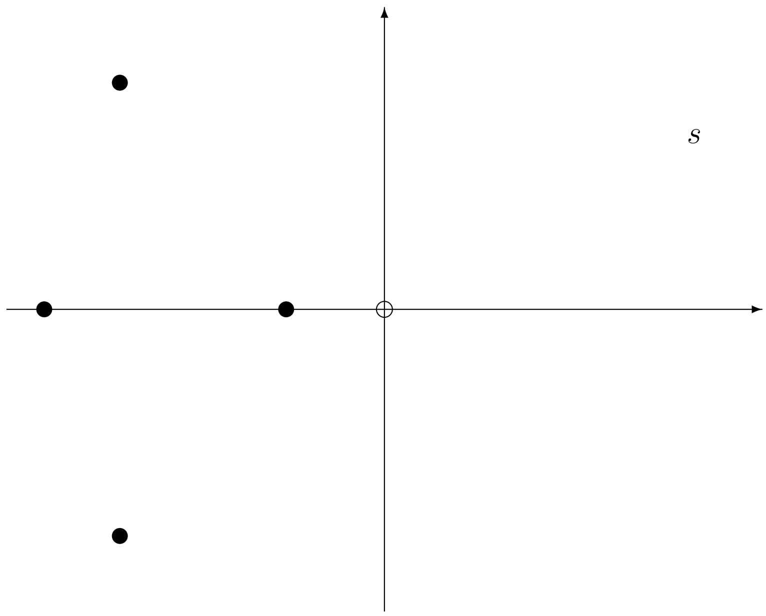
$$s_1^{zM}, s_2^{zM}, ..., s_n^{zM}$$

transmitancji operatorowej układu zmodyfikowanego miały z góry zadane wartości.

Bieguny i zera pierwotnego
układu sterowania



Bieguny i zera zmodyfikowanego
układu sterowania



Twierdzenie: Współczynniki wielomianów $M(s)$ i $M_0(s)$ oraz $L(s)$ i $L_0(s)$ związane są zależnościami

$$\tilde{a}_i = a_i + k_{(i+1)sp}, \quad i = 0, 1, ..., n-1; \; \tilde{c}_j = c_j + k_{(j+1)r}, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Dowód: Transformujemy opis układu zmodyfikowanego w przestrzeni stanu do dziedziny operatorowej

$$(sI - A)X^M(s) = bU(s),\ U(s) = U^0(s) - k_{sp}X^M(s),\ Y(s) = (c + k_r)X^M(s).$$

Obliczamy $G(s) = Y(s)/U(s)$ uzyskując

$$G(s) = \frac{(c + k_r)(sI - A)^{-1}b}{1 + k_{sp}(sI - A)^{-1}b}$$
$$= \frac{(c + k_r)(sI - A)_{ad}b}{(1 + k_{sp}(sI - A)^{-1}b)det(sI - A)}.$$

Tak więc

$$L(s) = (c + k_r)(sI - A)_{ad}b = c(sI - A)_{ad}b + k_r(sI - A)_{ad}b,$$
$$M(s) = (1 + k_{sp}(sI - A)^{-1}b)det(sI - A) = det(sI - A) + k_{sp}(sI - A)_{ad}b.$$

Zależności te, po porównaniu z wielomianami $L_0(s)$ i $M_0(s)$, przyjmą postać

$$L(s) = L_0(s) + k_r(sI - A)_{ad}b,\quad M(s) = M_0(s) + k_{sp}(sI - A)_{ad}b.$$

Z powyższych zależności wynika, że bieguny transmitancji układu zmodyfikowanego zależą tylko od elementów macierzy sprzężenia zwrotnego k_{sp}, a zera tej transmitancji zależą tylko od elementów macierzy połączenia równoległego k_r.

Wprowadzając oznaczenie

$$(sI - A)_{ad}b = \begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \\ \ldots \\ D_{nn} \end{pmatrix}$$

można zapisać wyrażenia

$$k_{sp}(sI - A)_{ad}b = \sum_{1 \le i \le n} k_{isp}D_{in},\quad k_r(sI - A)_{ad}b = \sum_{1 \le i \le n} k_{ir}D_{in}.$$

Ze specjalnej struktury macierzy $(sI - A)_{ad}$ wynika, że $D_{in} = s^{i-1}$, $i = 1, ..., n$ (obliczanie D_{in} sprowadza się do obliczania wyznaczników macierzy o strukturze trójkątnej z uwzględnieniem znaku dopełnienia algebraicznego). Ostatecznie zależności między wielomianami $M_0(s)$ i $M(s)$ oraz $L_0(s)$ i $L(s)$ przybierają postać

$$M(s)=M_0(s)+\sum_{1\le i\le n} k_{isp}s^{i-1},\ \ L(s)=L_0(s)+\sum_{1\le i\le n} k_{ir}s^{i-1},$$

co oznacza, że

$$\tilde{a}_i=a_i+k_{(i+1)sp}\ (i=1,...,n-1),\ \ \tilde{c}_j=c_j+k_{(j+1)r}.$$

Na tej podstawie określamy

Algorytm syntezy zmodyfikowanego wejściowo-wyjściowego układu sterowania:

• mając dane bieguny $s_1^M,...,s_n^M$ i zera $s_1^{zM},...s_n^{zM}$ transmitancji układu zmodyfikowanego wyznaczyć współczynniki $\tilde{a}_j,\ \tilde{c}_i$ wielomianów $M(s)$ i $L(s)$ ze wzoru

$$G(s)=\frac{(s-s_1^{zM})\cdot...\cdot(s-s_n^{zM})}{(s-s_1^M)\cdot...\cdot(s-s_n^M)}.$$

• wyznaczyć poszukiwane współczynniki macierzy sprzężenia zwrotnego i połączenia równoległego z zależności

$$k_{isp}=\tilde{a}_{i-1}-a_{i-1}\ (i=1,...,n),\ \ k_{jr}=\tilde{c}_{j-1}-c_{j-1}\ (j=1,...,n).$$

Przykład: Jest dany wejściowo-wyjściowy układ sterowania o transmitancji operatorowej

$$G_0(s)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+6)}=\frac{2s+3}{s^2+7s+6},$$

a więc $s_1=-1,\ s_2=-6,\ s_1^z=-3/2$ i

$$a_1=7,\ a_0=6,\ c_1=2,\ c_0=3.$$

Należy określić elementy macierzy sprzężenia zwrotnego $k_{sp}=(k_{1sp},k_{2sp})$ i macierzy połączenia równoległego $k_r=(k_{1r},k_{2r})$ tak, aby transmitancja układu zmodyfikowanego miała bieguny $s_1=-8,\ s_2=-10$ i zero $s_1^z=0$.

Wyznaczamy współczynniki $\tilde{a}_i,\ \tilde{c}_j$:

$$G(s)=\frac{s}{(s+8)(s+10)}=\frac{s}{s^2+18s+80},$$

a więc

$$\tilde{a}_1 = 18,\ \tilde{a}_0 = 80,\ \tilde{c}_1 = 1,\ \tilde{c}_0 = 0.$$

Następnie wyznaczamy poszukiwane elementy macierzy k_{sp} i k_r z zależności

$$k_{1sp} = \tilde{a}_0 - a_0 = 80 - 6 = 74,\ k_{2sp} = \tilde{a}_1 - a_1 = 18 - 7 = 11,$$

$$k_{1r} = \tilde{c}_0 - c_0 = 0 - 3 = -3,\ k_{2r} = \tilde{c}_1 - c_1 = 1 - 2 = -1.$$

Dostępność tylko części zmiennych stanu

Załóżmy, że tylko część zmiennych stanu jest dostępnych bezpośrednio, przy czym dana jest zależność wiążąca wektor dostępnych zmiennych stanu z wektorem stanu postaci

$$z^M(t) = C_1 x^M(t), \ \ C_1 \in R^{m \times n},$$

gdzie

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Należy określić macierz wierszową sprzężenia zwrotnego $k_{sp} = (k_{1sp}\ k_{2sp}\ ...\ k_{msp})$ i macierz połączenia równoległego $k_r = (k_{1r}\ k_{2r}\ ...\ k_{mr})$ układu tak, aby bieguny

$$s_1^M, s_2^M, ..., s_n^M$$

i zera

$$s_1^{zM}, s_2^{zM}, ..., s_n^{zM}$$

transmitancji operatorowej układu zmodyfikowanego miały z góry zadane wartości.

Układ zmodyfikowany opisywany jest w przestrzeni stanu równaniami

$$\dot{x}^M(t) = Ax^M(t) + bu^M(t), \ \ u^M(t) = u^0(t) - k_{sp}z^M(t), \ \ y(t) = (c + k_r)z^M(t),$$

przy czym $u^0(t)$ jest nowym sterowaniem zewnętrznym.

Z równań tych wyznaczamy analogicznie do poprzedniego przypadku zależności między wielomianami $M(s)$ i $M_0(s)$ oraz $L(s)$ i $L_0(s)$ o postaci

$$M(s) = M_0(s) + k_{sp}C_1(sI - A)_{ad}b,$$

$$L(s) = L_0(s) + k_r C_1 (sI - A)_{ad} b.$$

Elementy macierzy wierszowych k_{sp} i k_r dobieramy tak, aby spełnione były zależności

$$M(s_i^M) = 0,\ i = 1, ..., n;\ L(s_i^{zM}) = 0,\ i = 1, ..., m.$$

Z ostatnich zależności uzyskujemy układy równań:

$$\mathbb{G}_{sp} k_{sp}^T = \mathbb{M}_{sp},\ \mathbb{G}_r k_r^T = \mathbb{L}_r,$$

gdzie

$$\mathbb{G}_{sp} = \begin{pmatrix} (C_1(s_1^M I - A)b)^T \\ ... \\ (C_1(s_m^M I - A)b)^T \end{pmatrix},\ \ \mathbb{G}_r = \begin{pmatrix} (C_1(s_1^{zM} I - A)b)^T \\ ... \\ (C_1(s_m^{zM} I - A)b)^T \end{pmatrix},$$

oraz

$$\mathbb{M}_{sp} = -\begin{pmatrix} M_0(s_1^M) \\ ... \\ M_0(s_m^M) \end{pmatrix},\ \ \mathbb{L}_r = -\begin{pmatrix} L_0(s_1^{zM}) \\ ... \\ L_0(s_m^{zM} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierze $\mathbb{G}_{sp}$ i $\mathbb{G}_r$ są nieosobliwe jako macierze Vandermonde'a, więc poszukiwane macierze wierszowe można jednoznacznie wyjaśnić.

Przykład: Niech transmitancja układu pierwotnego ma postać

$$G_0(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Układ ten w przestrzeni stanów opisują równania

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),\ \ y(t) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \end{pmatrix} x(t).$$

Załóżmy, że dostępna jest tylko zmienna stanu x_1. Dla wielomianów $L(s)$ i $M(s)$ uzyskujemy wyrażenia

$$L(s) = c_1 s + c_0 + k_r,\ \ M(s) = s^2 + a_1 s + a_0 + k_{sp}.$$

Transmitancja układu zmodyfikowanego ma jedno zero

$$s_1^{zM} = -\frac{c_0 + k_r}{c_1}$$

i dwa bieguny

$$s_{1,2}^M = -0.5a_1 \pm 0.5(a_1^2 - 4(a_0 + k_{sp}))^{1/2}.$$

Wzory te pozwalają określić współczynniki k_{sp} i k_r przesuwające zero i bieguny układu w zadane położenia.

Zastosowanie obserwatorów stanu do syntezy liniowych układów sterowania

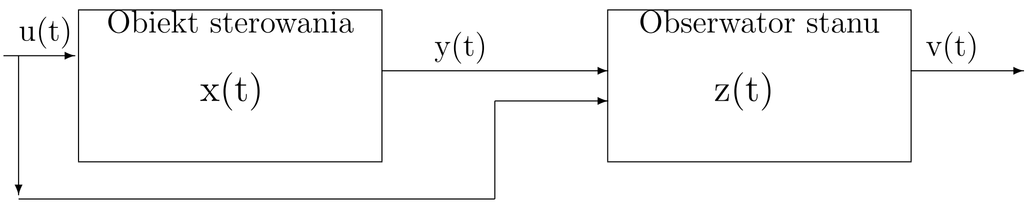
Do projektowania układów sterowania zastosowanie znajdują dwie charakterystyczne postaci równań stanu: postać kanoniczna sterowalna i postać kanoniczna obserwowalna.

Niech układ sterowania będzie opisywany następującymi liniowymi stacjonarnymi równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t),$$

gdzie A jest n-wymiarową macierzą kwadratową, b jest n-wymiarowym wektorem kolumnowym, a c jest n-wymiarowym wektorem wierszowym.

Układ ma **postać kanoniczną sterowalną**



Niech będzie dany układ sterowania, którego nie wszystkie zmienne stanu są bezpośrednio dostępne. Układ pozwalający odtworzyć na podstawie znajomości sterowania i wyjścia niedostępne zmienne stanu nazywa się **obserwatorem stanu**. Niech pierwotny układ sterowania będzie opisywany równaniami

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t).$$

Założymy, że

- układ pierwotny jest sterowalny i obserwowalny tj.

$$rank[B\ AB\ A^2B\ ...\ A^{n-1}B] = n,$$

$$rank \begin{pmatrix} C \\ CA \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

• rząd macierzy C jest równy $q,\ q < n$.

Do układu dołączamy obserwator stanu opisany równaniami

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + B_0 u(t) + B_1 y(t),\ \ v(t) = C_0 z(t) + C_1 y(t),$$

przy czym

$z(t), v(t)$ są odpowiednio $n{-}q$-wymiarowym wektorem stanu i n-wymiarowym wektorem wyjść obserwatora, a $A_0,\ B_0,\ B_1,\ C_0,\ C_1$ są macierzami stałymi. Podamy warunki, przy spełnieniu których obserwator stanu będzie odtwarzał wektor stanu układu pierwotnego.

Niech H będzie stałą macierzą o wymiarach $(n-q)\times n$. Biorąc pod uwagę równania układu pierwotnego równania obserwatora można napisać równanie

$$\dot{z}(t) - H\dot{x}(t) = A_0 z(t) - (HA - B_1 C)x(t) + (B_0 - HB)u(t).\ \ (*)$$

Jeżeli macierze $H,\ A_0,\ B_0,\ B_1$ dobierzemy tak, aby zachodziły równości

$$A_0 H = HA - B_1 C,\ \ B_0 = HB,$$

to równanie (*) przyjmie postać

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t),\ \ e(t) \doteq z(t) - Hx(t).\ \ (**)$$

Rozwiązanie równania (**) jest postaci

$$e(t) = exp(A_0 t)e(0).$$

Jeżeli wartości własne macierzy A_0 leżą w lewej półpłaszczyźnie, to dla dowolnych warunków początkowych

$$z(t) \to Hx(t),\ t \to \infty.$$

Narzucając równość

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix} = I_n,\ \ (***)$$

uzyskujemy warunek odtwarzania stanu

$$v(t) \to x(t),\ \ t \to \infty.$$

Równość (***) można przedstawić w postaci równoważnej

$$(A_0\ B_1) = HA(C_0\ C_1).\ \ (****)$$

Z powyższych rozważań wynika następujący

Algorytm syntezy obserwatora stanu:

• wybrać elementy macierzy H tak, aby (a) macierz

$$\begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix}$$

była macierzą nieosobliwą, a macierz A_0 miała zadane wartości własne położone w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej,

• korzystając z warunku

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix} = I_n,$$

obliczyć macierz $(C_0\ C_1)$:

$$(C_0\ C_1) = \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix}^{-1},$$

• obliczyć macierze A_0 i B_1 z warunku

$$(A_0\ B_1) = HA(C_0\ C_1).$$

• wyznaczyć macierz B_0 z równania $B_0 = HB$.

Przykład: wyznaczyć obserwator stanu dla układu sterowania

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Przyjmujemy macierz H w postaci $H = [h\ 1]$.Macierz

$$\begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jest macierzą nieosobliwą. Wobec tego obliczamy

$$(C_0\ C_1) = \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -h \end{pmatrix}$$

oraz

$(A_0\ B_1) = HA(C_0\ C_1) = (h-1, -h(h+1)), \quad B_0 = HB = (1).$

Niech macierz A_0 ma mieć poszukiwaną wartość własną równą -3. Uzyskujemy to dla $h = -2$. Macierze związane z opisem obserwatora stanu przybiorą postać

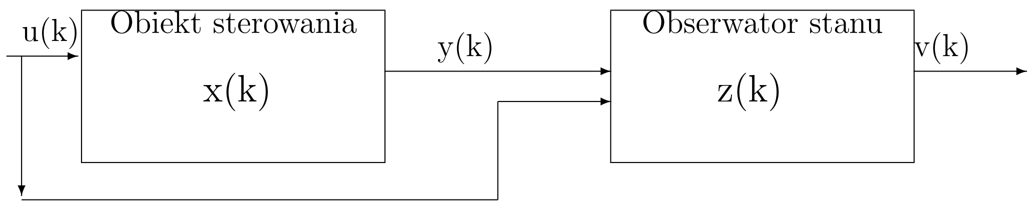
$$H = (-2, 1),\ A_0 = (-3),\ B_0 = (1),\ B_1 = (-2),\ C_0^T = (0\ 1),\ C_1^T = (1\ 2),$$

a obserwator opisany jest równaniami

$$\dot{z}(t) = -3z(t) + u(t) - 2y(t),\ \ v(t) = (0\ 1)^T z(t) + (1\ 2)^T y(t).$$

Obserwatory stanu dyskretnych układów sterowania

Jeśli w układzie dyskretnym nie wszystkie zmienne stanu są dostępne, to można zaprojektować obserwator stanu układu dyskretnego.



Dla układów dyskretnych istnieje możliwość zaprojektowania obserwatora stanu o skończonym czasie trwania procesów przejściowych (**the deadbeat observer**). Z równaniami dyskretnego układu sterowania

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ \ y(k) = Cx(k)$$

wiążemy obserwator stanu układu dyskretnego

$$z(k+1) = A_0 z(k) + B_0 u(k) + B_1 y(k),\ \ v(k) = C_0 z(k) + C_1 y(k).$$

Jeśli uda się określić elementy macierzy równań obserwatora tak, że macierz A_0 będzie l-nilpotentna tj. $A_0^l = 0$, to błąd odtwarzania stanu będzie zerowy począwszy od momentu l, gdyż

$$e(l) = A_0^l e(0) = 0.$$