# Sterowalność i obserwowalność liniowych układów sterowania

W zadaniach sterowania docelowego należy przeprowadzić obiekt opisywany za pomocą równania stanu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

z zadanego stanu początkowego

$$x(t_0) = x_0$$

do zadanego stanu końcowego

$$x(t_1) = x_1.$$

W związku z takim zadaniem nasuwa się pytanie czy dla danego obiektu istnieje sterowanie, które przeprowadzi obiekt z dowolnego stanu początkowego do dowolnego stanu końcowego w zadanym czasie lub w dowolnym lecz skończonym czasie ?

W szczególności w zadaniach liniowego sterowania docelowego należy przeprowadzić obiekt opisywany za pomocą liniowego stacjonarnego równania stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

z zadanego stanu początkowego

$$x(t_0) = x_0$$

do zadanego stanu końcowego

$$x(t_1) = x_1.$$

W związku z zadaniami liniowego sterowania docelowego nasuwa się pytanie jakie warunki muszą spełniać macierze $A$ i $B$ aby istniało sterowanie, które przeprowadzi obiekt z dowolnego stanu początkowego do dowolnego stanu końcowego w zadanym czasie lub w dowolnym lecz skończonym czasie ?

**Definicja sterowalności układu sterowania z czasem ciągłym:** Ciągły układ sterowania nazywa się układem sterowalnym, jeżeli stosując ograniczone przedziałami ciągłe sterowanie można go przeprowadzić w skończonym czasie $t_1$ z dowolnego stanu początkowego $x_0$ do zadanego stanu końcowego $x_1$. Przyjmując $x_1 = 0$ mówimy, że układ jest całkowicie sterowalny sterowalny do zera. Założenie zerowego stanu końcowego moña zawsze spełnić dokonując odpowiedniej liniowej transformacji współrzędnych stanu.

Następujące twierdzenie określa warunki jakie muszą spełniać macierze $A$ i $B$, aby liniowy stacjonarny układ sterowania z czasem ciągłym był sterowalny.

**Twierdzenie:** Liniowy stacjonarny układ sterowania z czasem ciągłym jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz sterowalności

$$S \doteq [B \ AB \ A^2B \ ... \ A^{n-1}B]$$

zawiera $n$ liniowo niezależnych kolumn. Warunek ten można sformułować w równoważnej postaci: rząd macierzy sterowalności jest równy wymiarowi przestrzeni stanu tj. $rz(S) = n$.

**Dowód:** Rozwiązanie liniowego stacjonarnego układu sterowania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

ma postać

$$x(t) = e^{At}\big(x_0 + \int_0^t e^{-A\tilde{t}}Bu(\tilde{t})d\tilde{t}\big).$$

Sterowalność do zera oznacza, że dla pewnego $t_1$ zachodzi równość

$$0 = e^{At_1}\big(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-A\tilde{t}}Bu(\tilde{t})d\tilde{t}\big).$$

Warunek ten będzie spełniony, jeśli

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int_0^{t_1} e^{-A\tilde{t}}Bu(\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= -\int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{(-\tilde{t})^i}{i!} Bu(\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A^i Bu_i, \quad u_i = -\int_0^{t_1} \frac{(-\tilde{t})^i}{i!} u(\tilde{t})d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Korzystamy z tw. Cayleya-Hamiltona: każda macierz kwadratowa $A_{n\times n}$ spełnia swoje równanie charakterystyczne

$$det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Ponieważ

$$A^{n+1} = AA^n = A\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_i A^i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i A^i$$

więc macierze $A^k$, $k \geq n$ mogą być przedstawione w postaci kombinacji liniowych macierzy $A^0, A^1, ..., A^{n-1}$. Oznacza to, że dla pewnych kombinacji liniowych $\bar{u}_i$ współczynników $u_i$ zachodzi równość

$$x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B\bar{u}_i$$

czyli

$$x_0 = B\bar{u}_0 + AB\bar{u}_1 + A^2 B\bar{u}_2 + ... + A^{n-1}B\bar{u}_{n-1}$$

lub

$$x_0 = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & ... & A^{n-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \bar{u}_{n-1} \end{pmatrix}$$

Jeśli macierz sterowalności $S$ zawiera $n$ liniowo niezależnych kolumn, to na tych kolumnach można rozpiąć $n$-wymiarową przestrzeń za pomocą sterowań $\bar{u}_i$.

Układ sterowania z wieloma sterowaniami nazywamy regularnie sterowalnym, jeżeli jest on sterowalny ze względu na każde wejście oddzielnie. Liniowy stacjonarny układ sterowania jest sterowalny regularnie jeżeli macierze sterowalności ze względu na każde wejście są rzędu $n$ tj. $rz(S_j) = n$, gdzie

$$S_j = (B_j \; AB_j \; A^2B_j \; ... \; A^{n-1}B_j), \quad j = 1, ..., n.$$

**Warunek dostateczny niesterowalności układu sterowania:** Liniowy stacjonarny układ sterowania opisywany równaniami stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} u(t)$$

Dowód: Ponieważ

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{11}^k & A_k \\ O & A_{22}^k \end{pmatrix},\ k = 1, 2, ...;\ \ A^k B = \begin{pmatrix} A_{11}^k B_1 \\ O \end{pmatrix},\ k = 1, 2, ...,$$

to

$$S = (B\ AB\ A^2B\ ...\ A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & A_{11}^2 B_1 & ... & A_{11}^{n-1}B_1 \\ O & O & O & ... & O \end{pmatrix},$$

a więc $rz(S) < n$.

**Twierdzenie:** Jeżeli liniowy stacjonarny układ sterowania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \ t \in [t_0, t_1],\ \ x(t_0) = x_0$$

jest sterowalny, to sterowanie

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t-t_0)} R^{-1} x_0\ \ (*)$$

przeprowadza układ ze stanu początkowego $x(t_0) = x_0$ do stanu końcowego $x(t_1) = 0$ w skończonym czasie $t_1 - t_0$, przy czym $R$ jest macierzą nieosobliwą określoną jak następuje

$$R = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tilde{t})} B B^T e^{A^T(t_0-\tilde{t})} d\tilde{t}.$$

Dowód: W chwili $t_1$ powinna być spełniona zależność

$$x(t_1) = 0 = e^{A(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tilde{t}}) Bu(\tilde{t}) d\tilde{t}\ / \cdot e^{-A(t_1-t_0)}.$$

Stąd

$$0 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tilde{t}} Bu(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

i

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tilde{t}} Bu(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Podstawiając sterowanie $(*)$ uzyskujemy

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tilde{t})} B(-B^T e^{A^T(t-t_0)} R^{-1} x_0) d\tilde{t}$$

tj.

$$x_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tilde{t}} B B^T e^{A^T(t-t_0)} R^{-1} x_0 d\tilde{t}$$

skąd wynika tożsamość

$$x_0 = RR^{-1}x_0.$$

Uzyskana tożsamość potwierdza tezę twierdzenia. Jednak należy jeszcze wykazać, że istnieje odwrotność mzcierzy $R$. Załóżmy, że układ jest sterowalny i że macierz $e^{At}B$ ma liniowo zależne wiersze tj.

$$v^T e^{At} B = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad v \in R^n.$$

Różniczkując $(n-1)$-krotnie powyższą zależność względem czasu otrzymujemy równość

$$v^T e^{At}[B\ AB\ A^2B\ ...\ A^{n-1}B] = 0.$$

Oznacza to, że rząd macierzy

$$e^{At}[B\ AB\ A^2B\ ...\ A^{n-1}B$$

jest mniejszy od $n$. Ponieważ $rz(e^{At}) = n$, więc $rz(S) < n$, a to jest sprzeczne z założeniem o sterowalności układu. Tak więc dla układów sterowalnych wiersze macierzy $e^{At}B$ są liniowo niezależne tj.

$$v^T e^{At} B \neq 0, \; t \in [t_0, t_1].$$

Niech $w(t) \doteq B^T e^{A^T(t_0-t)} v$. Wtedy

$$\int_{t_0}^{t_1} w^T(t) w(t) dt =$$

$$v^T \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tilde{t})} B B^T e^{A^T(t_0-\tilde{t})} d\tilde{t} v = v^T R v > 0.$$

Macierz $R$ jest symetryczna i dodatnio określona. W teorii macierzy dowodzi się, że taka macierz jest zawsze nieosobliwa. Załóżmy, że wartość własna $s_i$ macierzy $R$ jest zespolona. Wtedy

$$RP_i = s_i P_i \Rightarrow \bar{P}_i^T R P_i = s_i \bar{P}_i^T P_i \;\; (*)$$

i

$$R\bar{P}_i = \bar{s}_i P_i \Rightarrow R\bar{P}_i = \bar{s}_i \bar{P}_i$$

$$\Rightarrow \bar{P}_i^T R = \bar{s}_i \bar{P}_i^T \Rightarrow \bar{P}_i^T R P_i = \bar{s}_i \bar{P}_i^T P_i \;\; (**)$$

. Odejmując stronami wyrażenia (*) i (**) uzyskujemy

$$(s_i - \bar{s}_i)|P_i|^2 = 0.$$

Ponieważ $P_i$ jest wektorem niezerowym, to musi być $s_i = \bar{s}_i$ tj. wartości własne macierzy symetrycznej są rzeczywiste. Niech $s_i, s_j$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy $R$, a $P_i, P_j$ niech będą wektorami własnymi związanymi z tymi wartościami własnymi. Oznacza to, że

$$RP_i = s_i P_i \Rightarrow P_i^T R = s_i P_i^T$$

$$P_i^T R P_j = s_i P_i^T P_j \ \ (*)$$

i

$$RP_j = s_j P_j \Rightarrow P_i^T R P_j = s_j P_i^T P_j \ \ (**).$$

Odejmując stronami (*) i (**) uzyskujemy

$$(s_i - s_j) P_i^T P_j = 0$$

czyli

$$P_i^T P_j = 0,$$

gdyż $s_i \neq s_j$ z założenia. Oznacza to, że wektory własne macierzy $R$ są ortogonalne. Wektory te określone są z dokładnością do stałej - moña je więc wybrać tak, aby $P_i^T P_i = 1$.

Wtedy

$$P^T P = I \Rightarrow P^{-1} = P^T.$$

Podstawmy w formie kwadratowej $v^T R v$ wektor $v$ jako $v = Pw$. Mamy więc $w^T P^T R P w = w^T P^{-1} R P w = w^T diag_{1 \leq i \leq n}(s_1, ..., s_n) w = \sum_{i=1}^{n} s_i w_i^2$. Wartości $s_i$ muszą być dodatnie, gdyż badana forma kwadratowa jest dodatnio określona.

Stąd

$$P^{-1} R P = S \Rightarrow R = P S P^{-1} \Rightarrow$$

$$R^{-1} P S^{-1} P^{-1} \Rightarrow R^{-1} = P diag(s_1^{-1}, s_2^{-1}, ..., s_n^{-1}) P^{-1},$$

a więc $R^{-1}$ istnieje. □

**Definicja:** Układ sterowania nazywa się sterowalnym ze względu na wyjście układu, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego w chwili $t_0$ istnieje chwila $t_1 > t_0$ i ograniczone, przedziałami ciągłe sterowanie określone w przedziale $[t_0, t_1]$ i takie, że wyjście układu przyjmuje w chwili $t_1$ dowolną zadaną wartość $y_{t_1}$.

Warunek sterowalności ze względu na wyjście układu dla liniowych stacjonarnych układów sterowania przybiera postać $rz(S) = p$,gdzie

$$S = (CB\; CAB\; CA^2B\; ...\; CA^{n-1}B),$$

a $p$ jest wymiarem przestrzeni wyjść układu (liczbą wyjść układu.

Sterowanie docelowe ze względu na wyjście dla układu sterowania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; y(t) = Cx(t)$$

jest postaci

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} C^T \tilde{R}^{-1} Ce^{A(t_1-t_0)} x_0 - y(t_1)),$$

gdzie

$$\tilde{R} \doteq \int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_0-\tilde{t})} BB^T e^{A^T(t_0-\tilde{t})} C^T d\tilde{t}.$$

**Definicja obserwowalności układu sterowania:** Układ sterowania nazywa się obserwowalnym, jeżeli istnieje taka skończona chwila $t_1$, że na podstawie znajomości sterowania $u$ i wyjścia $y$ w przedziale $[t_0, t_1]$ można jednoznacznie wyznaczyć stan początkowy w chwili $t_0$.

**Twierdzenie:** Liniowy stacjonarny układ sterowania opisywany równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\; x(t_0) = x_0,\; y(t) = Cx(t)$$

jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz obserwowalności

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

jest rzędu $n$ tj. $rz(Q) = n$.

Dowód: Zakładając sterowanie zerowe uzyskujemy

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x(t_0).$$

Wyznaczamy pochodne wyjścia $y'(t)$ w przedziale $[t_0, t_1]$

$$y^j(t) = CA^j e^{A(t-t_0)} x_0, \; j = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Ponieważ macierz $e^{A(t-t_0)}$ jest nieosobliwa, więc stan $x_0$ można jednoznacznie wyznaczyć z ostatniego układu równań wtedy i tylko wtedy, gdy $rz(Q) = n$. $\square$

**Sterowalność liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym**

**Definicja sterowalności układów sterowania z czasem dyskretnym:** Dyskretny układ sterowania nazywa się układem sterowalnym, jeżeli stosując ograniczone sterowanie dyskretne można go przeprowadzić w skończonym czasie $k_1$ z dowolnego stanu początkowego $x_0$ do zadanego stanu końcowego $x_1$. Przyjmując $x_1 = 0$ mówimy, że układ dyskretny jest sterowalny do zera.

Rozważmy liniowy stacjonarny układ sterowania z czasem dyskretnym opisywany równaniami stanu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, ...; \; x(0) = x_0.$$

**Twierdzenie:** Liniowy stacjonarny układ sterowania z czasem dyskretnym jest sterowalny wtedy, gdy jego macierz sterowalności

$$S \doteq [B \; AB \; A^2B \; ... \; A^{n-1}B]$$

zawiera $n$ liniowo niezależnych kolumn. Warunek ten można sformułować w równoważnej postaci: rząd macierzy sterowalności jest równy wymiarowi przestrzeni stanu tj. $rz(S) = n$.

**Dowód:** Rozwiązanie liniowego stacjonarnego układu ma postać

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j).$$

W chwili $k_1$ mamy osiągnąć stan zerowy tj.

$$0 = A^{k_1} x_0 + \sum_{j=0}^{k_1-1} A^{k_1-j-1} Bu(j).$$

Przyjmując $k_1 = n$ uzyskujemy

$$-A^n x_0 = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u(j)$$

czyli

$$-A^n x_0 = [B\ AB\ A^2B\ ...\ A^{n-1}B] \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ . \\ . \\ . \\ u(0) \end{pmatrix}$$

Jeśli macierz sterowalności $S$ o wymiarach $n \times mn$ posiada nieosobliwą podmacierz $S_0$ o wmiarach $n \times n$, to dowolny wektor lewej strony ostatniej równości można wygenerować mnożąc macierz $S_0$ przez podwektor zmiennych sterujących związanych z kolumnami tej macierzy. Oznaczmy ten podwektor jako $\overset{n}{u}$. Dyskretne sterowanie docelowe dla układu liniowego stacjonarnego wyrazi się wzorem

$$\overset{n}{u} = -S_0^{-1} A^n x_0.$$

Wynika stąd, że warunkiem wystarczającym sterowalności układu dyskretnego jest warunek $rz(S) = n$. $\square$

Należy podkreślić, że, w odróżnieniu od układów z czasem ciągłym, warunek rzędu macierzy $S$ nie jest warunkiem koniecznym sterowalności układu dyskretnego. Nie obowiązuje on np. w przypadku tzw. nilpotentnej macierzy stanu. Jest to niezerowa macierz $A$ taka, że $A^n = 0$. Wtedy układ sprowadza do zera dowolny stan początkowy przy sterowaniu zerowym nawet jeśli warunek rzędu macierzy $S$ nie jest spełniony. Można powiedzieć, że taki układ dyskretny sam sprowadza się do zera.

Przykład: Dyskretny układ sterowania

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k), \quad k = 0, 1, 2, ...;\ x(0) = x_0$$

sam sprowadza się do zera, gdyż jego macierz stanu jest nilpotentna dla dowolnej wartości parametru $a$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Obserwowalność liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym**

**Definicja obserwowalności układów sterowania z czasem dyskretnym:** Dyskretny układ sterowania nazywa się układem obserwowalnym, jeżeli istnieje liczba kroków czasu dyskretnego $k_1$ taka, że na podstawie znajomości ciągu sterowań $u(0), u(1), ..., u(k_1 - 1)$ i ciągu wyjść $y(0), y(1), ..., y(k_1 - 1)$ można wyznaczyć jednoznacznie każdy stan początkowy $x_0$ tego układu.

Rozważmy liniowy stacjonarny układ sterowania z czasem dyskretnym opisywany równaniami stanu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \;\; k = 0, 1, ...; \; x(0) = x_0.$$

i równaniami wyjścia

$$y(k) = Cx(k), \;\; k = 0, 1, ....$$

**Twierdzenie:** Liniowy stacjonarny układ sterowania z czasem dyskretnym jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz obserwowalności

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

zawiera $n$ liniowo niezależnych wierszy czyli jest rzędu $n$ tj. $rz(Q) = n$.

**Dowód:** Rozwiązanie dla wyjścia liniowego stacjonarnego układu ma postać

$$y(k) = CA^k x_0 + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j).$$

Przyjmując sterowanie zerowe $u(j) = 0, \;\; j = 0, 1, ..., n-1$ uzyskujemy

$$y(k) = CA^k x_0, k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

czyli

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ . \\ . \\ . \\ y(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_0.$$

Jeśli macierz obserwowalności $Q$ o wymiarach $pn \times n$ posiada nieosobliwą podmacierz $Q_0$ o wymiarach $n \times n$, to każdy stan $x_0$ można wyznaczyć z zależności $x_0 = Q_0^{-1} \overset{n}{y}$, gdzie $\overset{n}{y}$ jest podwektorem współrzędnych wyjściowych związanych z wierszami mzcierzy $Q_0$. Istnienie nieosobliwej macierzy $Q_0$ jest równoważne z warunkiem $rz(Q) = n$. $\square$

**Rozkład kanoniczny Kalmana układów sterowania**

**Sprowadzanie liniowych stacjonarnych układów sterowania do postaci kanonicznej**

- Pojedyncze wartości własne macierzy stanu.

Załóżmy, że macierz stanu $A$ posiada pojedyncze wartości własne $s_1, s_2, ..., s_n$. Stosując znana z algebry liniowej przekształcenie diagonalizujące $P$ można sprowadzić macierz stanu do postaci diagonalnej

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \quad \tilde{A} = diag_{1 \leq i \leq n}(s_1, s_2, ..., s_n).$$

Przekształcenie $P$ jest macierzą złożoną z wektorów własnych macierzy $A$ tj. z rozwiązań równań liniowych

$$AP_i = s_i P_i, \quad i = 1, ..., n. \quad (*)$$

Z każdą wartością własną $s_i$ związany jest wektor własny $P_i$ określony z dokładnością do stałego mnożnika - jeśli $P_i$ jest wektorem własnym macierzy $A$, to $\alpha P_i$ jest również wektorem własnym tej macierzy. Ponieważ każde równanie macierzowe (*) składa się z $n$ skalarnych równań liniowo zależnych, to ustalamy wartość jednej współrzędnej wektora $P_i$, a pozostałe współrzędne tego wektora wyznaczamy ze zredukowanego układu $n-1$ równań. Diagonalizacja wynika z zależności

$$A(P_1P_2...P_n) = (P_1P_2...P_n)diag_{1\leq i\leq n}(s_1, s_2, ..., s_n)$$

$$\Rightarrow (P_1P_2...P_n)^{-1}A(P_1P_2...P_n) = diag_{1\leq i\leq n}(s_1, s_2, ..., s_n)$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = diag_{1\leq i\leq n}(s_1, s_2, ..., s_n).$$

Przykład: Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

mamy

$$det(sI - A) = 0 \Rightarrow s^2 + 6s + 8 = 0 \Rightarrow s_1 = -4,\ s_2 = -2.$$

Wyznaczamy wektory własne macierzy z równań

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2^1 \\ P_2^2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} P_2^1 \\ P_2^2 \end{pmatrix}.$$

W pierwszym równaniu zakładamy $P_1^1 = 1$ i uzyskujemy $P_1^2 = -4 + 3 = -1$. W drugim równaniu zakładamy $P_2^1 = 1$ i uzyskujemy $P_2^2 = -2 + 3 = 1$. Stąd

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Za wektor własny $P_i$ macierzy $A$ można przyjąć dowolną niezerową kolumnę macierzy dołączonej $(s_iI - A)_{ad}$. Z definicji macierzy odwrotnej wynika, że

$$(sI - A)(sI - A)_{ad} = I\ det(sI - A).$$

Ponieważ $det(s_iI - A) = 0$, więc

$$(s_iI - A)(s_iI - A)_{ad} = 0_{n\times n} \Rightarrow (s_iI - A)col(s_iI - A)_{ad} = 0_{n\times 1}.$$

Oznacza to, że dowolna niezerowa kolumna macierzy $(sI - A)_{ad}$ jest wektorem własnym macierzy $A$ odpowiadającym $i$-tej wartości własnej tej macierzy. Aby określić macierz diagonalizująą tworzymy macierze

$$(s_1 I - A)_{ad},\ (s_2 I - A)_{ad},\ ...,\ (s_n I - A)_{ad}$$

i wybieramy z każdej z nich niezerową kolumnę. Z tych kolumn zestawiamy macierz $P$.

Dla rozważanego przykładu mamy

$$(s_1 I - A)_{ad} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (s_2 I - A)_{ad} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla celów diagonalizacji układu sterowania wprowadzamy nowe zmienne stanu $x(t) = P\tilde{x}(t)$ i przekształcamy opis liniowego stacjonarnego układu sterowania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\Rightarrow P\dot{\tilde{x}}(t) = AP\tilde{x}(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = diag_{1\le i\le n}(s_1, s_2, ..., s_n)\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t),$$

gdzie

$$\tilde{A} \doteq P^{-1}AP, \ \ \tilde{B} \doteq P^{-1}B, \ \ \tilde{C} \doteq CP.$$

Zdiagonalizowany opis układu sterowania jest równoważny z następującym układem równań skalarnych

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = s_i\tilde{x}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{b}_{ij}u_j(t), \ \ i = 1, ..., n,$$

$$y_p(t) = \sum_{1\le i\le n} \tilde{c}_{pi}\tilde{x}_i(t), \ \ p = 1, ..., q.$$

Z ostatniego układu równań wynika następujący alternatywny warunek sterowalności i obserwowalności:

**Twierdzenie:** *Liniowy stacjonarny układ sterowania, którego macierz stanu ma pojedyncze wartości własne, jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wiersze macierzy $\tilde{B}$ są niezerowe. Układ ten jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie kolumny macierzy $\tilde{C}$ są niezerowe.*

**Dowód:**

• **1. Sterowalność.**

Jeśli $i$-ty wiersz macierzy $\tilde{B}$ jest zerowy, to równanie stanu $i$-tej współrzędnej staje się równaniem autonomicznym, na które nie oddziaływuje sterowanie

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = s_i \tilde{x}_i(t), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad t \geq 0.$$

Nie mamy więc żadnego wpływu na ewolucję $i$-tej współrzędnej stanu układu kanonicznego. Oznacza to, że brak wierszy zerowych w macierzy $\tilde{B}$ jest warunkiem koniecznym sterowalności układu kanonicznego. Warunek wystarczający wynika z następującej reprezentacji macierzy sterowalności $\tilde{S}$. Niech $\tilde{B}_i$ będzie $i$-tym wierszem macierzy $\tilde{B}$. Zapiszmy macierz $\tilde{S}$ w postaci

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{B}_{n-1} \end{pmatrix},$$

a macierz sterowalności $S$ w postaci

$$\tilde{S} = (\tilde{B}\ \tilde{A}\tilde{B}\ ...;\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & s_1\tilde{B}_1 & ... & s_1^{n-1}\tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 & s_2\tilde{B}_2 & ... & s_1^{n-1}\tilde{B}_2 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \tilde{B}_{n-1} & s_n\tilde{B}_{n-1} & ... & s_n^{n-1}\tilde{B}_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2 & ... & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & ... & \tilde{B}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & s_1 I_m & ... & s_1^{n-1} I_m \\ I_m & s_2 I_m & ... & s_1^{n-1} I_m \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ I_m & s_n I_m & ... & s_n^{n-1} I_m \end{pmatrix},$$

gdzie $I_m$ jest $m$-wymiarową macierzą jednostkową. Macierz

$$\begin{pmatrix} I_m & s_1 I_m & ... & s_1^{n-1} I_m \\ I_m & s_2 I_m & ... & s_1^{n-1} I_m \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ I_m & s_n I_m & ... & s_n^{n-1} I_m \end{pmatrix},$$

jest nieosobliwa jako uogólniona macierz Vandermonde'a. Ponieważ mnożenie macierzy przez kwadratową macierz nieosobliwą nie zmienia rzędu danej macierzy, więc o rzędzie macierzy $\tilde{S}$ decyduje rząd macierzy $diag_{1 \le i \le n}(\tilde{B}_i)$. Macierz ta jest rzędu $n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wiersze są niezerowe. $\square$

• **2. Obserwowalność.**

Jeśli $i$-ta kolumna macierzy $\tilde{C}$ jest zerowa, to $i$-ta współrzędna stanu nie jest powiązana z żadną współrzędną wyjściową układu

$$y_p(t) = \tilde{c}_{p1}\tilde{x}_1(t) + ... + 0 \cdot \tilde{x}_i(t) + ... + \tilde{c}_{pn}\tilde{x}_n(t), \quad p = 1, ..., q.$$

Konieczność warunku niezerowania się kolumn macierzy $\tilde{C}$ dla zapewnienia obserwowalności układu jest więc oczywista. Warunek wystarczający wynika z następującej reprezentacji macierzy obserwowalności $\tilde{Q}$. Niech $\tilde{C}_i$ będzie $i$-tą kolumną macierzy $\tilde{C}$. Zapiszmy macierz $\tilde{C}$ w postaci

$$\tilde{C} = (\tilde{C}_1 \, \tilde{C}_2 \, ... \, \tilde{C}_n),$$

a macierz obserwowalności $\tilde{Q}$ w postaci

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & ... & \tilde{C}_n \\ s_1\tilde{C}_1 & s_2\tilde{C}_2 & ... & s_n\tilde{C}_n \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ s_1^{n-1}\tilde{C}_1 & s_2^{n-1}\tilde{C}_2 & ... & s_n^{n-1}\tilde{C}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_m & s_1 I_m & ... & s_1^{n-1} I_m \\ I_m & s_2 I_m & ... & s_1^{n-1} I_m \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ I_m & s_n I_m & ... & s_n^{n-1} I_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2 & ... & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & ... & \tilde{C}_{n-1} \end{pmatrix}$$

gdzie $I_m$ jest $m$-wymiarową macierzą jednostkową. Ponieważ mnożenie macierzy przez kwadratową macierz nieosobliwą nie zmienia rzędu danej macierzy, więc o rzędzie macierzy $\tilde{Q}$ decyduje rząd macierzy $diag_{1 \leq i \leq n}(\tilde{C}_i)$. Macierz ta jest rzędu $n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej kolumny są niezerowe. $\square$

W niektórych sytuacjach proces sterowania opisywany jest za pomocą równania różniczkowego $n$-tego rzędu

$$\mathrm{x}^{(n)}(t) + a_1 \mathrm{x}^{n-1}(t) + ... + a_{n-1}\mathrm{x}^{(1)}(t) + a_n \mathrm{x}(t) = bu(t),$$

gdzie $\mathrm{x}(t)$ jest charakterystyczną wielkością dla dynamiki obiektu sterowania. Przechodzimy do standardowego opisu za pomocą wektora stanu wyróżniając zmienne stanu i zmienne wyjściowe jak następuje:

$$x_1(t) = \mathrm{x}(t),\ x_2(t) = \mathrm{x}^{(1)}(t),\ ...\ x_n(t) = \mathrm{x}^{(n-1)}(t),\ \ y(t) = \mathrm{x}(t).$$

Równania stanu i równania wyjścia przybiorą postać

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & ... & -a_1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y(t) = (1\ 0\ ...\ 0)x(t).$$

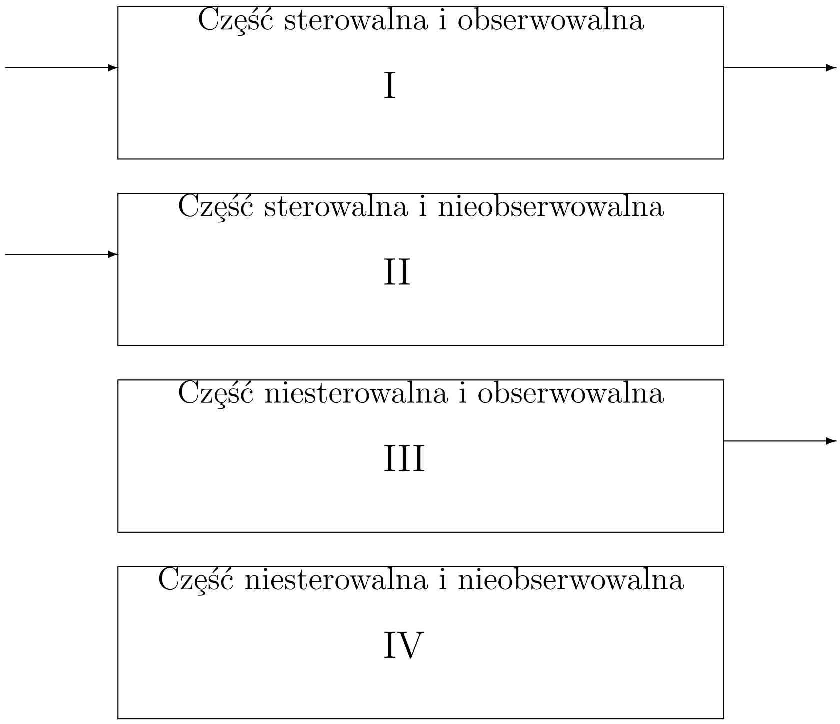
Moña wykazać, że jeśli wartości własne $s_1, ..., s_n$ macierzy stanu badanego układu są różne, to przekształcenie diagonalizujące ma postać

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ s_1 & s_2 & ... & s_n \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & ... & s_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diagonalizacja opisu układu sterowania umożliwia dokonanie rozkładu kanonicznego Kalmana układu na jego cztery charakterystyczne części, a mianowicie na

- część sterowalną i obserwowalną,
- część sterowalną i nieobserwowalną,
- część niesterowalną i obserwowalną,
- część niesterowalną i nieobserwowalną.

**Rozkład kanoniczny Kalmana układu sterowania**




• Do części I zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i$ związane zarówno z niezerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ jak i z niezerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

• Do części II zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i$ związane z niezerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ i z zerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

• Do części III zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i$ związane z zerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ i z niezerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

• Do części IV zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i$ związane zarówno z zerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ jak i z zerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

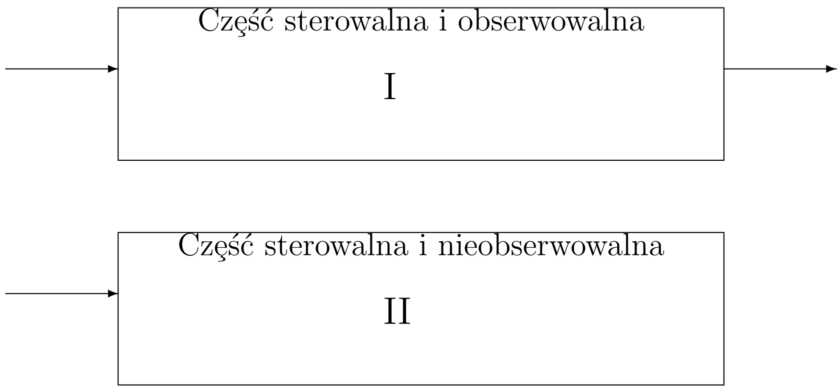
Przykład: Układ sterowania opisywany jest równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t),\; y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Mamy w tym przypadku

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozkład kanoniczny Kalmana badanego układu ma postać



• Wielokrotne wartości własne macierzy stanu.

Jeśli macierz stanu posiada wielokrotne wartości własne, to można ją sprowadzić do postaci pseudodiagonalnej Jordana

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & J_n \end{pmatrix},$$

gdzie $J_i$ jest blokiem Jordana związanym z wartością własną $s_i$ krotności $\kappa_i$, przy czym blok Jordana składa się z klatek Jordana. Ograniczymy się do przypadku, gdy bloki Jordana składają się z pojedynczych klatek Jordana postaci

$$J_i = \begin{pmatrix} s_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_i & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & \\ 0 & 0 & 0 & ... & s_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & s_i \end{pmatrix}.$$

Wyznaczanie przekształcenia diagonalizującego bazuje na równości $AP = PJ$. Kolumny $\overset{i}{P}_\kappa$ $\kappa = 1, 2, ..., \kappa_i$ macierzy $P$ związane z $i$-tą klatką Jordana obliczamy z układu równań:

$$A\overset{i}{P}_1 = s_i\overset{i}{P}_1,$$
$$A\overset{i}{P}_2 = s_i\overset{i}{P}_2 + \overset{i}{P}_1,$$
$$A\overset{i}{P}_3 = s_i\overset{i}{P}_3 + \overset{i}{P}_2,$$
$$...$$
$$A\overset{i}{P}_{\kappa_i} = s_i\overset{i}{P}_{\kappa_i} + \overset{i}{P}_{\kappa_i - 1}.$$

Po sprowadzeniu układu sterowania do postaci kanonicznej z klatkami Jordana możemy również dokonać rozkładu kanonicznego Kalmana tego układu. Wyróżnimy w tym przypadku wiersze macierzy $\tilde{B}$ związane z dolnymi wierszami klatek Jordana i macierz złożoną z tych wierszy oznaczymy przez $\tilde{\tilde{B}}$.

Zmienne kanoniczne stanu związane z wyższymi wierszami klatek są sterowane przez zmienną kanoniczną stanu $\tilde{\tilde{x}}_i$ związaną z dolnym wierszem.

• Do części I zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{\tilde{x}}_i$ związane zarówno z niezerowymi wierszami macierzy $\tilde{\tilde{B}}$ jak i z niezerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$ oraz pozostałe współrzędne stanu danej klatki Jordana.

• Do części II zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{\tilde{x}}_i$ związane z niezerowymi wierszami macierzy $\tilde{\tilde{B}}$ i z zerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$ oraz pozostałe współrzędne stanu danej klatki Jordana.

• Do części III zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{\tilde{x}}_i$ związane z zerowymi wierszami macierzy $\tilde{\tilde{B}}$ i z niezerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$ oraz pozostałe współrzędne stanu danej klatki Jordana.

• Do części IV zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{\tilde{x}}_i$ związane zarówno z zerowymi wierszami macierzy $\tilde{\tilde{B}}$ jak i z zerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$ oraz pozostałe współrzędne stanu danej klatki Jordana.

Przykład: Układ sterowania jest opiany równaniami

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \;\; y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Wartości własne są postaci

$$det(sI - A) = 0 \Rightarrow s_1 = -3, \; s_1 = 3, \; s_2 = -5.$$

Jest więc jedna wartość własna podwójna $s_1 = -3$, $\kappa_1 = 2$. Rozwiązanie równań

$$A\overset{1}{P}_1 = -3\overset{1}{P}_1,$$

$$A\overset{1}{P}_2 = -3\overset{1}{P}_2 + \overset{1}{P}_1,$$

$$AP_3 = -5P_3$$

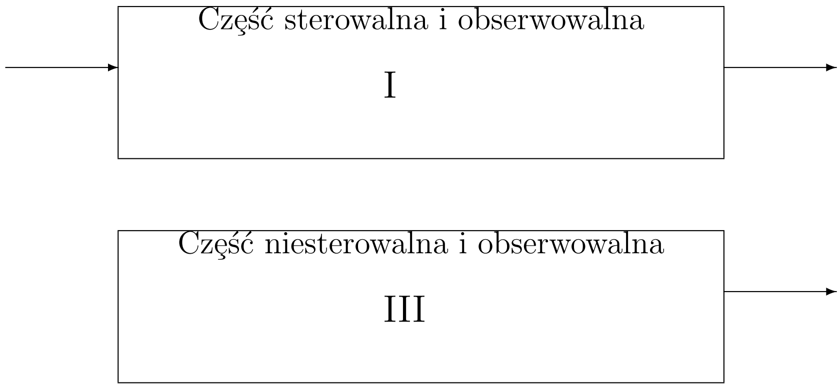
daje w wyniku

$$\overset{1}{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \overset{1}{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Układ kanoniczny jest opisany równaniami

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t).$$

Rozkład kanoniczny Kalmana badanego układu ma postać




**Postać kanoniczna liniowych stacjonarnych układów sterowania z czasem dyskretnym**

Dla celów diagonalizacji układu sterowania z czasem dyskretnym wprowadzamy nowe zmienne stanu $x(k) = P\tilde{x}(k)$ i przekształcamy opis dyskretnego liniowego stacjonarnego układu sterowania

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$\Rightarrow P\tilde{x}(k+1) = AP\tilde{x}(k) + Bu(k), y(k) = CP\tilde{x}(t) + Du(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k), y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + Du(k)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(k+1) = diag_{1 \le i \le n}(z_1, z_2, ..., z_n)\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k), y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + Du(k),$$

gdzie

$$\tilde{A} \doteq P^{-1}AP, \quad \tilde{B} \doteq P^{-1}B, \quad \tilde{C} \doteq CP.$$

Zdiagonalizowany opis układu sterowania jest równoważny z następującym układem równań skalarnych

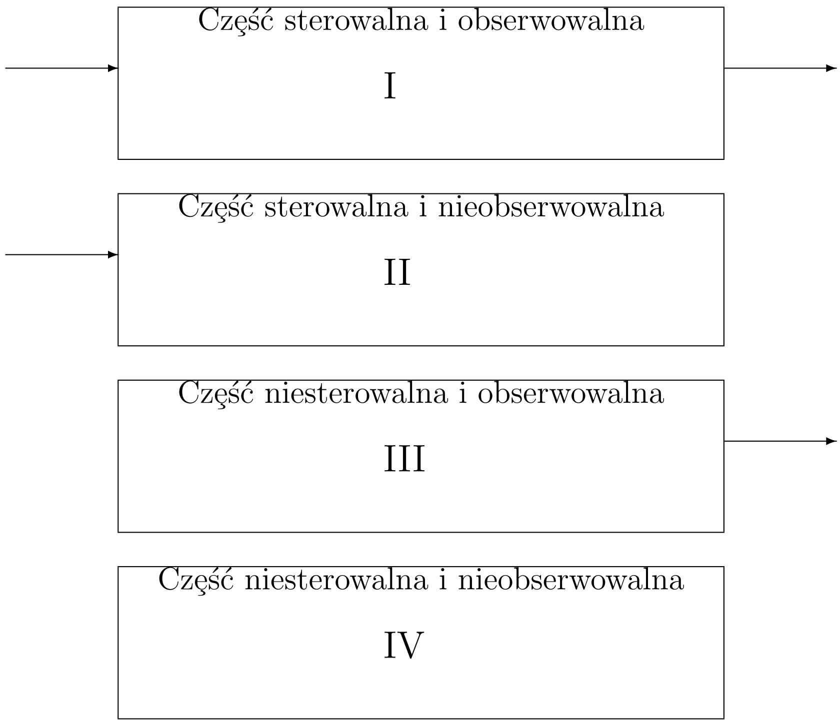
$$\tilde{x}_i(k+1) = z_i\tilde{x}_i(k) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{b}_{ij}u_j(k), \quad i = 1, ..., n,$$

$$y_p(k) = \sum_{1 \le i \le n} \tilde{c}_{pi} \tilde{x}_i(k), \quad p = 1, ..., q.$$

Z ostatniego układu równań wynika następujący alternatywny warunek sterowalności i obserwowalności dyskretnych układów sterowania:

**Twierdzenie:** *Dyskretny liniowy stacjonarny układ sterowania, którego macierz stanu ma pojedyncze wartości własne, jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wiersze macierzy $\tilde{B}$ są niezerowe. Układ ten jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie kolumny macierzy $\tilde{C}$ są niezerowe.*

**Rozkład kanoniczny Kalmana układu sterowania**




• Do części I zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i(k)$ związane zarówno z niezerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ jak i z niezerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

• Do części II zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i(k)$ związane z niezerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ i z zerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

• Do części III zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i(k)$ związane z zerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ i z niezerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.

• Do części IV zaliczamy współrzędne stanu $\tilde{x}_i(k)$ związane zarówno z zerowymi wierszami macierzy $\tilde{B}$ jak i z zerowymi kolumnami macierzy $\tilde{C}$.