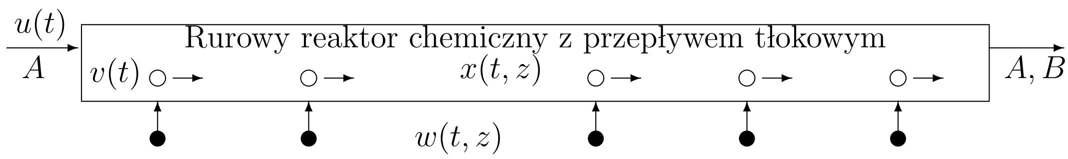
Optymalne sterowanie cykliczne dla układów o parametrach rozłożonych

Szeroka klasa procesów technologicznych realizowana jest w **obiektach o parametrach rozłożonych** np. w urządzeniach typu rurowego lub kolumnowego. Stan $x(t,z)$ takich obiektów zależy od współrzędnej czasowej t i od współrzędnej przestrzennej z. Natomiast sterowanie może mieć charakter zarówno skupiony skupiony typu brzegowego $u(t)$ oraz typu przepływowego $v(t)$ jak i przestrzennie rozłożony $w(t,z)$. Rozpatrzmy **proces sterowania cyklicznego realizowany w rurowym reaktorze chemicznym z przepływem tłokowym**



W reaktorze rurowym zachodzi proces przemiany substancji surowcowej A w produkt użyteczny B. W związku z rozłożonym charakterem obiektu sterowania wyróżniamy zmienną czasową $t \in [0,\tau]$ i zmienną przestrzenną $z \in [0,1]$. Zmienne procesowe są funkcjami, ogólnie biorąc, zmiennej czasowej i zmiennej przestrzennej:

• $x(t,z)$ - rozłożony stan procesu tj. stężenie substancji surowcowej A w chwili t w punkcie z reaktora rurowego,

• $w(t,z)$ - rozłożone sterowanie procesu tj. intensywność źródła ciepła w chwili t w punkcie z reaktora,

• $u(t)$ - skupione sterowanie brzegowe procesu tj. stężenie substancji surowcowej A w chwili t w strumieniu wejściowym reaktora,

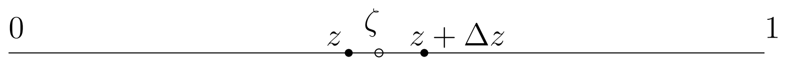
• $v(t)$ - skupione sterowanie przepływowe procesu tj. natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor w chwili t.

Niektóre sterowania procesu o parametrach rozłożonych mogą przybierać postać skupioną lub rozłożoną w zależności od konkretnych potrzeb realizacji danego procesu np. stosując spowolnienie przepływu w początkowej strefie reaktora i przyspieszenie w jego strefie końcowej przydajemy rozłożony charakter sterowaniu przepływowemu $v(t, z)$.

Opis dynamiki rozważanego procesu z przepływem tłokowym można uzyskać metodą bilansu masy dla małego elementu obiektu sterowania. Dla pochodnych cząstkowych stanu rozłożonego stosujemy oznaczenia

- $x_t(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej czasowej,
- $x_z(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej.

Wyróżniamy mały element reaktora $[z, z + \Delta z]$.



Niech $\zeta \in (z, z+\Delta z)$. Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu masy dla małego elementu $[z, z + \Delta z]$ reaktora:

$$\underbrace{a x_t(t, \zeta)\Delta z}_{s1} \approx \underbrace{a v(t)(x(t, z) - x(t, z + \Delta z)}_{s2} - \underbrace{\varkappa e^{-\beta/w(t,\zeta)} x^p(t, \zeta)\Delta z}_{s3}, \quad (*)$$

gdzie

s1 - szybkość zmiany w czasie ilości substancji A w małym elemencie reaktora,

s2 - ilość substancji A wprowadzanej do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$,

s3 - ilość substancji A ulegającej przemianie w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora,

a - współczynnik przekroju reaktora rurowego,

$\varkappa$, β - współczynniki prawa Arrheniusa określającego wpływ temperatury na szybkość reakcji,

p - rząd reakcji przemiany $A \to B$.

W modelu aproksymującym uwzględniono nieliniową zależność szybkości reakcji od rozłożonego stanu procesu (np. dla $p = 2$ jest to zależność kwadratowa) oraz od rozłożonego sterowania temperaturowego (jest to nieliniowa i niewypukła zależność określona prawem Arrheniusa).

Dzieląc zależność (*) przez $a\Delta z$ uzyskujemy

$$x_t(t,\zeta) \approx -v(t)\frac{x(t,z+\Delta z)-x(t,z)}{\Delta z} - \varkappa e^{-\beta/w(t,\zeta)}x^p(t,\zeta),$$

gdzie podstawiono $\varkappa := \varkappa/a$. Przejście graniczne $\Delta z \to 0$ tj. $\zeta \to z$ pozwala określić równanie stanu procesu w postaci równania bilansu masy procesu z przepływem tłokowym

$$x_t(t,z) = -v(t)x_z(t,z) - \varkappa e^{-\beta/w(t,z)}x^p(t,z), \ \ (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1].$$

Równanie to uzupełniamy **warunkiem brzegowym**

$$x(t,0) = u(t), \ \ t \in [0,\tau]$$

oraz **warunkiem okresowym**

$$x(0,z) = x(\tau,z), \ \ z \in [0,1].$$

Równanie stanu jest w tym przypadku równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Wskaźnik jakości rozważanego procesu cyklicznego z przepływem tłokowym można określić jako maksymalizację średniego uzysku produktu użytecznego tj. jako minimalizację średniej ilości nieprzereagowanego surowca w strumieniu wyjściowym reaktora

$$-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)x(t,1)dt \ \to \ max.$$

Uwzględnić należy także ograniczenia chwilowe stanu i sterowania

$$x(t,z) \in X, \ \ u(t) \in U, \ \ v(t) \in V, \ \ w(t,z) \in W, \ \ (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1],$$

oraz ograniczenia średniej wydajności źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu tj.

• uśrednione ograniczenie wydajności źródła surowca

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s,$$

• uśrednione ograniczenie wydajności separatora surowca i produktu użytecznego na wyjściu reaktora

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s,$$

• uśrednione ograniczenie wydajności źródła ciepła

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^1 w(t,z)dtdz = w_s.$$

Sformułujemy ogólny problem optymalnego sterowania cyklicznego (OSC) procesami z przepływem tłokowym jako problem polegający na maksymalizacji wskaźnika jakości w postaci wartości średniej funkcji zysku chwilowego

$$Q(\tau,x,u,v,w) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(x(t,1),v(t))dt$$

przy ograniczeniach obejmujących równanie stanu procesu z przepływem tłokowym

$$x_t(t,z) = -v(t)x_z(t,z) + f(x(t,z),w(t,z)), \ \ (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1],$$

z **warunkiem brzegowym**

$$x(t,0) = u(t), \ \ t \in [0,\tau],$$

a także zakresy dopuszczalnych wartości stanu i sterowania

$$x(t,z) \in X, \ \ u(t) \in U, \ \ v(t) \in V, \ \ w(t,z) \in W, \ \ (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1],$$

oraz uśrednionych ograniczeń sterowania odzwierciedlających ograniczoną wydajność źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu tj.

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^1 w(t,z)dtdz = w_s.$$

gdzie

• $x \in H_\tau^{1,n}([0,1])$ jest cykliczną rozłożoną trajektorią stanu procesu,

• $u \in H_\tau^{0,m_u}$ jest cyklicznym sterowaniem brzegowym,

• $v \in H_\tau^{0,m_v}$ jest cyklicznym sterowaniem przepływowym,

• $w \in H_\tau^{0,m_w}([0,1])$ jest cyklicznym rozłożonym sterowaniem,

• $X \subset R^n$, $U \subset R^{m_u}$, $V \subset R^{m_v}$, $W \subset R^{m_w}$ są wypukłymi zbiorami domkniętymi określającymi dopuszczalne przedziały wartości zmiennych procesowych, zaś

$$g : R^n \times R^{m_v} \to R, \ \ f : R^n \times R^{m_w} \to R^n.$$

Przestrzeń $H_\tau^{r,n}([0,1])$ jest przestrzenią τ-okresowych n-wymiarowych funkcji zmiennych $(t,z) \in [0,\tau]\times[0,1]$, których r-krotne pochodne cząstkowe względem t i z są całkowaln z kwadratem. Warunek cykliczności trajektorii stanu jest zawarty w definicji przestrzeni trajektorii stanu. Warunek cykliczności sterowań nie musi być formułowany w postaci jawnej - sterowania są ogólnie biorąc funkcjami nieciągłymi (jako elementy przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem) i zawsze mogą być okresowo przedłużone względem czasu $t \in [0, \infty)$.

Ustalenie przebiegów stanu i sterowania w czasie redukuje rozważany problem do problemu optymalnego sterowania statycznego (OSS) polegającego na maksymalizacji wskaźnika jakości dla procesu sterowania opisywanego równaniem różniczkowym o pochodnych zwyczajnych względem zmiennej przestrzennej

$$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = g(\bar{x}(1), \bar{v})$$

przy ograniczeniach obejmujących statyczne równanie stanu w postaci równania różniczkowego o pochodnych zwyczajnych

$$0 = -\bar{v}\bar{x}_z(z) + f(\bar{x}(z), \bar{w}(z)), \quad z \in [0, 1],$$

z warunkiem początkowym

$$\bar{x}(0) = \bar{u},$$

a także zakresy dopuszczalnych wartości stanu i sterowania

$$\bar{x}(z) \in X, \quad \bar{u} \in U, \quad \bar{v} \in V, \quad \bar{w}(z) \in W, \quad z \in [0, 1],$$

oraz uśrednionych ograniczeń sterowania odzwierciedlających ograniczoną wydajność źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu na poziomie statycznym tj.

$$\bar{u} = u_s, \quad \bar{v} = v_s, \quad \int_0^1 \bar{w}(z)dz = w_s.$$

gdzie $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in R^n \times R^{m_u} \times R^{m_v} \times R^{m_w}$ jest statycznym procesem sterowania. Optymalny statyczny proces sterowania $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}, \overset{o}{\bar{v}}, \overset{o}{\bar{w}})$ można stosunkowo łatwo wyznaczyć stosując metody optymalizacji procesów o parametrach skupionych. Również jego implementacja nie sprawia trudności i sprowadza się do projektowania układów stabilizacji stanu procesu. Jednak proces taki może zapewniać stosunkowo niską wartość wskaźnika jakości. Dlatego analizowane są warunki, przy których stosowanie cyklicznego sposobu prowadzenia procesu zwiększa jego wydajność w porównaniu z optymalnym procesem statycznym. Uzyskanie takich warunków dla układów o parametrach rozłożonych jest utrudnione z uwagi na złożony charakter ich równań stanu jako równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Z tego względu praktyczne zastosowanie znajduje redukcja równań dynamiki o parametrach rozłożonych do równań dynamiki o parametrach skupionych np. z wykorzystaniem dyskretyzacji przestrzennej.

Wprowadzamy punkty dyskretyzacji przestrzennej $\Delta = 1/K,\ z_k \doteq k\Delta,\ k = 0, 1, ..., K$ oraz dyskretyzację rozłożonego stanu $x_k(t) \doteq x(t, z_k)$ i rozłożonego sterowania $w_k(t) \doteq w(t, z_k)$ oraz dyskretyzację pochodnej cząstkowej względem zmiennej przestrzennej $x_z(t, z_k) \approx (x_k(t) - x_{k-1}(t))/\Delta$.

Równanie dynamiki reaktora w postaci równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego zastępujemy następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\dot{x}_k(t) = -v(t)(x_k(t) - x_{k-1}(t))/\Delta - \varkappa e^{-\beta/w_k(t)} x_k^p(t), \quad k = 1, ..., K,$$

przy czym sterowanie brzegowe podstawiamy do równania pierwszego $x_0(t) = u(t)$. Wskaźnik jakości i pozostałe ograniczenia zapisujemy w postaci

$$-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)x_K(t)dt \ \rightarrow \ max,$$

$$x_k(t) \in X, \ \ u(t) \in U, \ \ v(t) \in V, \ \ w_k(t) \in W, \ \ (t \in [0,\tau]; \ k = 1, 2, ..., K,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{k=1}^{K} w_k(t)dt = w_s.$$

Ogólnie dyskretyzacja przestrzenna problemu optymalnego sterowania cyklicznego dla procesów z przepływem tłokowym prowadzi do problemu optymalnego sterowania cyklicznego dla złożonego procesu o parametrach skupionych: zmaksymalizować uśredniony wskaźnik jakości

$$Q(\tau, x, u, v, w) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(x_K(t), v(t))dt$$

uwzględniając ograniczenia

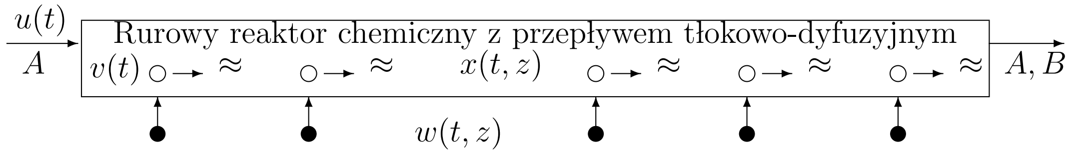
$$\dot{x}_k(t) = f_k(x_k(t), x_{k-1}(t), u(t), v(t), w_k(t), \ \ t \in [0,\tau],$$

$$x_k(t) \in X, \ \ u(t) \in U, \ \ v(t) \in V, \ \ w_k(t) \in W, \ \ (t \in [0,\tau]; \ k = 1, 2, ..., K,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{k=1}^{K} w_k(t)dt = w_s.$$

W takim sformułowaniu pojawia się nowe zagadnienie porównania efektywności cyklicznego oddziaływania poszczególnych sterowań u, v, w z oddzielna i łącznego oddziaływania sterowań u, v lub u, w lub v, w oraz u, v, w.

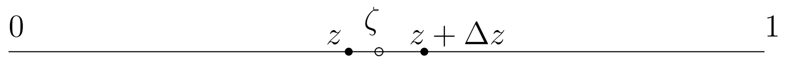
Rozpatrzmy **proces sterowania cyklicznego realizowany w rurowym reaktorze chemicznym z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym**



Opis dynamiki rozważanego procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym można uzyskać metodą bilansu masy dla małego elementu obiektu sterowania. Stosujemy oznaczenia

- $x(t, z)$ - rozłożony stan procesu tj. stężenie substancji surowcowej A w chwili t w punkcie z reaktora rurowego,
- $w(t, z)$ - rozłożone sterowanie procesu tj. intensywność źródła ciepła w chwili t w punkcie z reaktora,
- $u(t)$ - skupione sterowanie brzegowe procesu tj. stężenie substancji surowcowej A w chwili t w strumieniu wejściowym reaktora,
- $v(t)$ - skupione sterowanie przepływowe procesu tj. natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor w chwili t,
- $x_t(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej czasowej,
- $x_z(t, z)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej,
- $x_{zz}(t, z)$ - druga pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej.

Wyróżniamy mały element reaktora $[z, z + \Delta z]$.



Niech $\zeta \in (z, z+\Delta z)$. Równanie dynamiki procesu aproksymujemy metodą bilansu masy dla małego elementu $[z, z + \Delta z]$ reaktora:

$$\underbrace{ax_t(t,\zeta)\Delta z}_{s1} \approx \underbrace{av(t)(x(t,z) - x(t,z+\Delta z)}_{s2} + \underbrace{\alpha\big(x_z(t,z+\Delta z) - x_z(t,z)\big)}_{s3}$$
$$- \underbrace{\varkappa e^{-\beta/w(t,\zeta)} x^p(t,\zeta)\Delta z}_{s4}, \quad (**)$$

gdzie

s1 - szybkość zmiany w czasie ilości substancji A w małym elemencie reaktora,

s2 - ilość substancji A wprowadzanej do małego elementu przez ściankę z i wyprowadzanej z tego elementu przez ściankę $z + \Delta z$,

s3 - dyfuzja (rozprzestrzenianie się) cząsteczek substancji A przez granice małego elementu z i $z+\Delta z$ ze współczynnikiem dyfuzji α (transport substancji przez powierzchnie o niezerowym gradiencie stężenia tej substancji powodujący wyrównywanie jej stężenia),

s4 - ilość substancji A ulegającej przemianie w produkt użyteczny B w małym elemencie reaktora,

a - współczynnik przekroju reaktora rurowego,

α - współczynnik dyfuzji,

$\varkappa$, β - współczynniki prawa Arrheniusa określającego wpływ temperatury na szybkość reakcji,

p - rząd reakcji przemiany $A \to B$.

W modelu aproksymującym uwzględniono nieliniową zależność szybkości reakcji od rozłożonego stanu procesu (np. dla $p = 2$ jest to zależność kwadratowa) oraz od rozłożonego sterowania temperaturowego (jest to nieliniowa i niewypukła zależność określona prawem Arrheniusa).

Dzieląc zależność (**) przez $a\Delta z$ uzyskujemy

$$x_t(t,\zeta) \approx -v(t)\frac{x(t,z+\Delta z)-x(t,z)}{\Delta z} + \alpha\big(x_z(t,z+\Delta z)-x_z(t,z)\big)/\Delta z$$
$$-\varkappa e^{-\beta/w(t,\zeta)}x^p(t,\zeta),$$

gdzie podstawiono $\alpha := \alpha/a$, $\varkappa := \varkappa/a$. Przejście graniczne $\Delta z \to 0$ tj. $\zeta \to z$ pozwala określić równanie stanu procesu w postaci równania bilansu masy procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym

$$x_t(t,z) = -v(t)x_z(t,z) + \alpha x_{zz}(t,z) - \varkappa e^{-\beta/w(t,z)}x^p(t,z), \quad (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1].$$

Równanie to uzupełniamy **warunkami brzegowymi**

- na początku reaktora

$$v(t)x(t,0) - \alpha x_z(t,0) = v(t)u(t), \quad t \in [0,\tau],$$

- i na końcu reaktora

$$v(t)x(t,0) + \alpha x_z(t,0) = 0 \;\; (x(t,0) \approx 0 \Rightarrow \alpha x_z(t,0) = 0) \;\; t \in [0,\tau]$$

oraz **warunkiem okresowym**

$$x(0,z) = x(\tau,z), \quad z \in [0,1].$$

Równanie stanu jest w tym przypadku równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego. Wskaźnik jakości rozważanego procesu cyklicznego z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym można określić jako maksymalizację średniego uzysku produktu użytecznego tj. jako minimalizację średniej ilości nieprzereagowanego surowca w strumieniu wyjściowym reaktora

$$-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)x(t,1)dt \;\to\; max.$$

Uwzględnić należy także ograniczenia chwilowe stanu i sterowania

$$x(t,z) \in X, \;\; u(t) \in U, \;\; v(t) \in V, \;\; w(t,z) \in W, \;\; (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1],$$

oraz ograniczenia średniej wydajności źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu tj.

- uśrednione ograniczenie wydajności źródła surowca

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s,$$

• uśrednione ograniczenie wydajności separatora surowca i produktu użytecznego na wyjściu reaktora

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s,$$

• uśrednione ograniczenie wydajności źródła ciepła

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^1 w(t,z)dtdz = w_s.$$

Sformułujemy ogólny problem optymalnego sterowania cyklicznego (OSC) procesami z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym jako problem polegający na maksymalizacji wskaźnika jakości w postaci wartości średniej funkcji zysku chwilowego

$$Q(\tau,x,u,v,w) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(x(t,1),v(t))dt$$

przy ograniczeniach obejmujących równanie stanu procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym

$$x_t(t,z) = -v(t)x_z(t,z) + \alpha x_{zz}(t,z) + f(x(t,z),w(t,z)), \quad (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1],$$

z **warunkami brzegowymi**

$$v(t)x(t,0) - \alpha x_z(t,0) = v(t)u(t), \quad t \in [0,\tau],$$

$$v(t)x(t,1) + \alpha x_z(t,1) = 0 \;\; (x(t,1) \approx 0 \Rightarrow \alpha x_z(t,1) = 0) \;\; t \in [0,\tau]$$

oraz **warunkiem okresowym**

$$x(0,z) = x(\tau,z), \quad z \in [0,1],$$

a także zakresy dopuszczalnych wartości stanu i sterowania

$$x(t,z) \in X, \quad u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \quad w(t,z) \in W, \quad (t,z) \in [0,\tau]\times[0,1],$$

oraz uśrednionych ograniczeń sterowania odzwierciedlających ograniczoną wydajność źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu tj.

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s, \; \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s, \; \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_0^1 w(t,z)dtdz = w_s.$$

Ustalenie przebiegów stanu i sterowania w czasie redukuje rozważany problem do problemu optymalnego sterowania statycznego (OSS) polegającego na maksymalizacji wskaźnika jakości dla procesu sterowania opisywanego równaniem różniczkowym **o pochodnych zwyczajnych rzędu drugiego** względem zmiennej przestrzennej

$$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = g(\bar{x}(1), \bar{v})$$

przy ograniczeniach obejmujących statyczne równanie stanu w postaci równania różniczkowego o pochodnych zwyczajnych

$$0 = -\bar{v}\bar{x}_z(z) + \alpha x_{zz}(t, z) + f(\bar{x}(z), \bar{w}(z)), \quad z \in [0, 1],$$

z warunkami dwugranicznymi

$$\bar{v}\bar{x}(0) - \alpha\bar{x}_z(0) = \bar{v}\bar{u}, \quad \alpha\bar{x}_z(1) = 0,$$

a także zakresy dopuszczalnych wartości stanu i sterowania

$$\bar{x}(z) \in X, \quad \bar{u} \in U, \quad \bar{v} \in V, \quad \bar{w}(z) \in W, \quad z \in [0, 1],$$

oraz uśrednionych ograniczeń sterowania odzwierciedlających ograniczoną wydajność źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu na poziomie statycznym tj.

$$\bar{u} = u_s, \quad \bar{v} = v_s, \quad \int_0^1 \bar{w}(z)dz = w_s.$$

gdzie $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in R^n \times R^{m_u} \times R^{m_v} \times R^{m_w}$ jest statycznym procesem sterowania. Optymalny statyczny proces sterowania $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}, \overset{o}{\bar{v}}, \overset{o}{\bar{w}})$ można stosunkowo łatwo wyznaczyć stosując metody optymalizacji procesów o parametrach skupionych.

Również w tym przypadku praktyczne warunki dominacji sterowania cyklicznego moňa uzyskać stosując dyskretyzację przestrzenną procesu.

Wprowadzamy punkty dyskretyzacji przestrzennej $\Delta = 1/K$, $z_k \doteq k\Delta$, $k = 0, 1, ..., K$ oraz dyskretyzację rozłożonego stanu $x_k(t) \doteq x(t, z_k)$ i rozłożonego sterowania $w_k(t) \doteq w(t, z_k)$ oraz dyskretyzację pochodnych cząstkowych względem zmiennej przestrzennej $x_z(t, z_k) \approx (x_k(t) - x_{k-1}(t))/\Delta$, $x_{zz}(t, z_k) \approx (x_{k+1} - 2x_k(t) + x_{k-1}(t))/\Delta^2$.

Równanie dynamiki reaktora w postaci równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego zastępujemy następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\dot{x}_k(t) = -v(t)(x_k(t) - x_{k-1}(t))/\Delta + (x_{k+1} - 2x_k(t) + x_{k-1}(t))/\Delta^2$$

$$-\varkappa e^{-\beta/w_k(t)} x_k^p(t), \quad k = 1, ..., K,$$

przy czym należy dookreślić wielkości $x_0(t)$ oraz $x_{K+1}(t)$. Wykorzystujemy do tego celu warunki dwugraniczne:

$$v(t)x_0(t) - \alpha(x_1(t) - x_0(t))/\Delta = v(t)u(t) \Rightarrow x_0(t) = (v(t)u(t) + \alpha x_1(t))/(v(t) + \alpha),$$

$$\alpha(x_{K+1} - x_K)/\Delta = 0 \Rightarrow x_{K+1} = x_K.$$

Wskaźnik jakości i pozostałe ograniczenia zapisujemy w postaci

$$-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)x_K(t)dt \ \to \ max,$$

$$x_k(t) \in X, \ \ u(t) \in U, \ \ v(t) \in V, \ \ w_k(t) \in W, \ \ (t \in [0,\tau]; \ k = 1, 2, ..., K,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{k=1}^K w_k(t)dt = w_s.$$

Ogólnie dyskretyzacja przestrzenna problemu optymalnego sterowania cyklicznego dla procesów z przepływem tłokowym prowadzi do problemu optymalnego sterowania cyklicznego dla złożonego procesu o parametrach skupionych: zmaksymalizować uśredniony wskaźnik jakości

$$Q(\tau, x, u, v, w) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(x_K(t), v(t))dt$$

uwzględniając ograniczenia

$$\dot{x}_k(t) = f_k(x_{k+1}(t), x_k(t), x_{k-1}(t), u(t), v(t), w_k(t), \ \ t \in [0,\tau], \ \ k = 1, 2, ..., K,$$

$$x_k(t) \in X, \ \ u(t) \in U, \ \ v(t) \in V, \ \ w_k(t) \in W, \ \ (t \in [0,\tau]; \ k = 1, 2, ..., K,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = u_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v(t)dt = v_s, \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{k=1}^K w_k(t)dt = w_s.$$

W takim sformułowaniu pojawia się nowe zagadnienie porównania efektywności cyklicznego oddziaływania poszczególnych sterowań procesu z przepływem tłokowo-dyfuzyjnym u, v, w z oddzielna i łącznego oddziaływania sterowań u, v lub u, w lub v, w oraz u, v, w.