Metody rzutowania i funkcji barierowych dla problemów sterowania optymalnego

Problem optymalnego sterowania procesem dynamicznym z ograniczeniami zasobowymi może polegać na polega na minimalizacji wskaźnika jakości obejmującego koszty realizacji procesu i wartość produktu użytecznego

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt + h(x(t_1))$$

z uwzględnieniem

- równania stanu procesu z zadanym stanem początkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \ \ t \in [t_0,t_1], \ \ x(t_0) = x_0$$

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-,u^+], \ \ t \in [t_0,t_1],$$

  oraz

- ograniczeń zasobowych sterowania

  w postaci równościowej

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt = b,$$

  lub nierównościowej

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt \leq b,$$

gdzie $x \in W_2^1([t_0,t_1];R^n)$ jest trajektorią stanu procesu, $u \in L_2([t_0,t_1];R^m)$ jest jego sterowaniem, a

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \ \ h : R^n \to R,$$

$$f : R^n \times R^m \times R \to R^n, \ \ \varphi : R^n \times R^m \times R \to R^q$$

są, ogólnie biorąc, funkcjami nieliniowymi.

Na podstawie standardowych twierdzeń o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego z zadanym warunkiem początkowym można uważać równanie stanu rozważanej klasy procesów za rozwikływalne względem stanu w funkcji sterowania. Określone jest więc odwzorowanie $x(t,u)$ jednoznacznie wyznaczające stan procesu w chwili t w funkcju sterowania u.

Pozwala to zredukować rozważany problem do przestrzeni sterowania: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t,u),u(t),t)dt + h(x(t_1,u))$$

z uwzględnieniem ograniczeń chwilowych i równościowych ograniczeń zasobowych sterowania

$$u \in U \doteq \{u \in L_2([t_0,t_1];R^m) : u(t) \in [u^-,u^+] \ \ (t \in [t_0,t_1]), \ \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt = b\}$$

lub ograniczeń chwilowych i nierównościowych ograniczeń zasobowych sterowania

$$u \in U \doteq \{u \in L_2([t_0,t_1];R^m) : u(t) \in [u^-,u^+] \ \ (t \in [t_0,t_1]), \ \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u(t))dt \leq b\}.$$

Praktyczna realizacja wielu algorytmów sterowania optymalnego związana jest z dyskretyzacją sterowania. Zastosowanie znajduje tu przede wszystkim baza funkcji schodkowych $(t_0 = 0, \ t_1 = 1)$ $u(t,\mathsf{u}) = \sum_{k=0}^{K-1} e_k(t)\mathsf{u}_k$, gdzie $\mathsf{u}_k \in R^m$ and

$$e_k(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t \in [k/K,(k+1)/K), \\ 0 & if \quad t \notin [k/K,(k+1)/K). \end{cases}$$

Wyznaczamy rozwiązanie równania stanu ze sterowaniem dyskretnym

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t,\mathsf{u}),t), \ \ t \in [0,1],$$

$$x(0) = x_0$$

oraz równanie sprzężone ze sterowaniem dyskretnym

$$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t),u(t,\mathsf{u}),t)\eta(t) + g_x^T(x(t),u(t,\mathsf{u}),t), \ \ t \in [0,1],$$

$$\eta(1) = -h_x^T(x(1)),$$

a następnie określamy funkcję Hamiltona dla przypadku sterowania zdyskretyzowanego

$$H_u(x(t),u(t,\mathsf{u}),t) = -g(x(t),u(t,\mathsf{u}),t) + \eta(t)^T f(x(t),u(t,\mathsf{u}),t).$$

Gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni funkcji schodkowych uzyskuje się w postaci zdyskretyzowanej

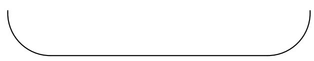
$$J_u(u) = (J_{u_k}(u))_{k=0}^{K-1},$$

gdzie

$$J_{u_k}(u) = -\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} H_u(x(t), u(t, u), t)dt, \quad \delta \doteq 1/K, \quad k = 0, 1, ..., K-1.$$

Metoda rzutowania gradientu w przestrzeni sterowania

Funkcja wypukła:



Założenie: składowe funkcji ograniczeń zasobowych $\varphi_p(u(t)), \quad p = 1, 2, ..., q$ są funkcjami wypukłymi względem u(t) w przedziale $[u^-, u^+]$ tj.

$$\varphi_p(\alpha u(t) + (1-\alpha)\tilde{u}(t)) \leq \alpha\varphi_p(u(t)) + (1-\alpha)\varphi_p(\tilde{u}(t)), \quad \alpha \in [0, 1]$$

gdzie $u(t)$ i $\tilde{u}(t)$ są sterowaniami z przedziału $[u^-, u^+]$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym wypukłości funkcji dwukrotnie różniczkowalnych jest nieujemność drugiej pochodnej funkcji w danym obszarze. Tak więc funkcje

$$\varphi_1(u(t)) \doteq u_1(t), \quad \varphi_2(u(t)) \doteq u^2(t)$$

są wypukłe w każdym nieujemnym przedziale. Wypukłość funkcji φ_p pociąga za sobą wypukłość zbioru sterowań dopuszczalnych. Do optymalizacji sterowania można zastosować metodę rzutowania gradientu w przestrzeni sterowań

$$u^{\kappa+1} = P_U\big(u^\kappa - \gamma^\kappa J_u^T(u^\kappa)\big), \quad \kappa = 0, 1, 2, ... ,$$

gdzie u^κ jest sterowaniem na κ-tej iteracji algorytmu, γ^+ jest długością kroku w kierunku antygradientu, a

$$P_U(\tilde{u}^\kappa) \doteq argmin\{||u - \tilde{u}^\kappa|| : u \in U\}$$

jest rzutem ortogonalnym antygradientowej modyfikacji sterowania

$$\tilde{u}^\kappa \doteq u^\kappa - \gamma^\kappa J_u^T(u^\kappa)$$

na zbiór sterowań dopuszczalnych. W przypadku stosowania schodkowej dyskretyzacji sterowania zbiór dyskretnych sterowań dopuszczalnych z ograniczeniami chwilowymi i równościowymi ograniczeniami zasobowymi przybiera postać

$$U_K \doteq \{ \ \{u_k\}_{k=0}^{K-1} : \ u_k \in [u^-, u^+], \ k = 0, 1, ..., K-1; \ \sum_{k=0}^{K-1} \varphi(u_k)/K = b \ \},$$

zaś zbiór dyskretnych sterowań dopuszczalnych z ograniczeniami chwilowymi i nierównościowymi ograniczeniami zasobowymi przybiera postać

$$U_K \doteq \{ \ \{u_k\}_{k=0}^{K-1} : \ u_k \in [u^-, u^+], \ k = 0, 1, ..., K-1; \ \sum_{k=0}^{K-1} \varphi(u_k)/K \leq b \ \}.$$

Określenie rzutu ortogonalnego sterowania dyskretnego $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^{K-1}$ na zbiór U_K jest równoważne z minimalizacją kwadratu odległości euklidesowej

$$\min_{u_k \in U_K} \sum_{k=0}^{K-1} (u_k - \tilde{u}_k)^2/K,$$

od wypukłego zbioru U_K.

Wkomponowanie ograniczenia zasobowego do funkcji celu za pomocą mnożnika Lagrange'a λ pozwala przekształcić powyższy problem do postaci minimalizacji zmodyfikowanej funkcji celu

$$\sum_{k=0}^{K-1} (u_k - \tilde{u}_k)^2/K + \lambda(\sum_{k=0}^{K-1} \varphi(u_k)/K - b)$$

z uwzględnieniem ograniczeń chwilowych sterowania dyskretnego

$$u_k \in [u^-, u^+], \quad k = 0, 1, 2, ..., K-1.$$

Jeśli uznać mnożnik λ za ustalony parametr, to ostatni problem można zapisać w postaci równoważnej: zminimalizować

$$\sum_{k=0}^{K-1} \left((u_k - \tilde{u}_k)^2 + \lambda \varphi(u_k) \right)$$

na zbiorze

$$u_k \in [u^-, u^+], \quad k = 0, 1, 2, ..., K-1.$$

Dla liniowej funkcji $\varphi(u(t)) = u(t)$ stosowanej np. do określenia sumarycznego zużycia substratu $\int_0^1 u(t)dt$ uzyskuje się

$$\sum_{k=0}^{K-1} \left((u_k - \tilde{u}_k)^2 + \lambda u_k \right)$$

na zbiorze

$$u_k \in [u^-, u^+], \quad k = 0, 1, 2, ..., K-1.$$

Optymalne rozwiązanie wyznaczone jest przez obliczenie punktu zerowego pochodnej składowych funkcji celu i obcięcie tego punktu do przedziału dopuszczalnych wartości sterowania $[u^-, u^+]$ tj.

$$2(u_k - \tilde{u}_k) + \lambda = 0, \quad u_k = \tilde{u}_k - \lambda/2, \quad u_k = sat(\tilde{u}_k - \lambda/2, u^-, u^+),$$

gdzie funkcja sat jest zdefiniowana jak następuje

$$sat(x, y, z) = \begin{cases} x & gdy \quad x \in [y, z] \\ y & gdy \quad x < y \\ z & gdy \quad x > z \end{cases}$$

Mnożnik λ obliczany jest jako rozwiązanie równania zasobowego

$$\psi(\lambda) = b, \quad \psi(\lambda) \doteq \sum_{k=0}^{K-1} sat(\tilde{u}_k - \lambda/2, u^-, u^+)/K.$$

Jeśli $\hat{\lambda} \geq 0$ jest rozwiązaniem powyższego równania, to rzut ortogonalny antygradientowej modyfikacji sterowania dyskretnego na zbiór U_K daje się określić w postaci

$$P_{U_K}(\tilde{u}_k) = \{sat(\tilde{u}_k - \hat{\lambda}/2, u^-, u^+)\}_{k=0}^{K-1}.$$

Dla kwadratowej funkcji $\varphi(u(t)) = u^2(t)$ stosowanej np. do określenia sumarycznego zużycia energii $\int_0^1 u^2(t)dt$ uzyskuje się zadanie z mnożnikiem λ: zminimalizować

$$\sum_{k=0}^{K-1} \left((u_k - \tilde{u}_k)^2 + \lambda u_k^2\right)$$

na zbiorze

$$u_k \in [u^-, u^+], \quad k = 0, 1, 2, ..., K-1.$$

W tym przypadku wygodnie jest przekształcić minimalizowaną funkcję do postaci

$$\sum_{k=0}^{K-1} \left((1+\lambda)u_k^2 - 2u_k\tilde{u}_k\right)$$

Optymalne rozwiązanie wyznaczone jest przez obliczenie punktu zerowego pochodnej składowych funkcji celu i obcięcie tego punktu do przedziału dopuszczalnych wartości sterowania $[u^-, u^+]$ tj.

$$2(1+\lambda)(u_k - 2\tilde{u}_k) = 0, \quad u_k = \tilde{u}_k/(1+\lambda), \quad u_k = sat(\tilde{u}_k/(1+\lambda), u^-, u^+),$$

gdzie funkcja sat jest zdefiniowana jak następuje

$$sat(x,y,z) = \begin{cases} x & gdy \quad x \in [y,z] \\ y & gdy \quad x < y \\ z & gdy \quad x > z \end{cases}$$

Mnożnik λ obliczany jest jako rozwiązanie równania zasobowego

$$\psi(\lambda) = b, \quad \psi(\lambda) \doteq \sum_{k=0}^{K-1} sat^2(\tilde{u}_k/(1+\lambda), u^-, u^+)/K.$$

Jeśli $\hat{\lambda} \geq 0$ jest rozwiązaniem powyższego równania, to rzut ortogonalny antygradientowej modyfikacji sterowania dyskretnego na zbiór U_K daje się określić w postaci

$$P_{U_K}(\tilde{u}_k) = \{sat(\tilde{u}_k/(1+\lambda), u^-, u^+)\}_{k=0}^{K-1}.$$

Dla równościowych ograniczeń zasobowych mnożnik λ jest nieograniczonego znaku. W przypadku nierównościowych ograniczeń zasobowych należy wyznaczyć nieujemny mnożnik $\lambda \geq 0$ jako rozwiązanie nierówności zasobowej

$$\psi(\lambda) \leq b, \quad \psi(\lambda) \doteq \sum_{k=0}^{K-1} sat(\tilde{u}_k - \lambda/2, u^-, u^+)/K$$

jeśli $\varphi(t) = u(t)$ (ograniczenie surowcowe) i jako rozwiązanie nierówności zasobowej

$$\psi(\lambda) \leq b, \quad \psi(\lambda) \doteq \sum_{k=0}^{K-1} sat^2(\tilde{u}_k/(1+\lambda), u^-, u^+)/K$$

jeśli $\varphi(t) = u^2(t)$ (ograniczenie energetyczne).

Algorytm rzutowania gradientu

dla problemów sterowania optymalnego z ograniczeniami zasobowymi

• Etap wstępny. Wybierz wymiar bazy schodkowej sterowania K i dyskretne sterowanie początkowe (współczynniki bazy schodkowej) $\mathsf{u} \doteq \{\mathsf{u}_k\}_{k=0}^{K-1}$ i dokładność obliczeń ϵ.

• Etap pierwszy. Wyznacz rozwiązanie równania stanu ze sterowaniem dyskretnym

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t, \mathsf{u}), t), \quad t \in [0, 1],$$

$$x(0) = x_0$$

oraz równanie sprzężone ze sterowaniem dyskretnym

$$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t), u(t, \mathsf{u}), t)\eta(t) + g_x^T(x(t), u(t, \mathsf{u}), t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\eta(1) = -h_x^T(x(1)).$$

• Etap drugi. Oblicz gradient zredukowanego wskaźnika jakości

$$J_{\mathsf{u}_k}(\mathsf{u}) = -\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} H_u(\eta(t), x(t), u(t, \mathsf{u}), t)dt, \quad \delta = 1/K, \quad k = 0, 1, ..., K-1,$$

i podstaw startową długość kroku γ.

• Etap trzeci. Wyznacz rzut ortogonalny sterowania antygradientowego na łączne ograniczenia chwilowe zasobowe sterowania

$$P_{\mathsf{U}}(\mathsf{u} - \gamma J_{\mathsf{u}}(\mathsf{u})) = \{sat(\mathsf{u} - \gamma J_{\mathsf{u}}(\mathsf{u})) + \lambda/2, u^-, u^+)\}_{k=0}^{K-1}$$

rozwiązując równanie krzywej zasobowej $\psi(\lambda) = 0$ względem λ

$$\sum_{k=0}^{K-1} sat(\mathsf{u} - \gamma J_{\mathsf{u}}(\mathsf{u})) + \lambda/2, u^-, u^+)/K = b.$$

• Etap czwarty. Jeśli $J(P_U(\mathsf{u} - \gamma J_{\mathsf{u}}(\mathsf{u}))) < J(\mathsf{u})$, to podstaw $\mathsf{u} := \mathsf{u} - \gamma J_{\mathsf{u}}(\mathsf{u})$. W przeciwnym przypadku podstaw $\gamma := \gamma/2$ i wróć do etapu 3.

• Etap piąty. Jeśli

$$||\mathsf{u} - P_{\mathsf{U}}(\mathsf{u} - J_{\mathsf{u}}(\mathsf{u})|| < \epsilon,$$

to stop. W przeciwnym razie wróć do etapu pierwszego.

Zbieżność metody rzutowania gradientu.

Gradient zredukowanego wskaźnika jakości może mieć postać wierszową $J_u(u) \doteq (J_{u_1}(u), J_{u_2}(u), ..., J_{u_m}(u))$ lub kolumnową $J'(u) \doteq J_u^T(u)$.

Lemat. Jeśli gradient $J'(u)$ zredukowanego wskaźnika jakości spełnia na zbiorze wypukłym U warunek Lipschitza ze stałą $L \leq 0$

$$|J'(u) - J'(v)| \leq L|u - v|, \quad u, v \in U,$$

to zachodzi nierówność

$$|J(u) - J(v) - \langle J', u - v\rangle| \leq L|u - v|^2$$

dla dowolnych $u, v \in U$.

Dowód. Na podstawie rozwinięcia funkcji $J(u)$ w szereg Taylora pierwszego rzędu można napisać, że

$$J(u) - J(v) - \langle J'(v), u - v\rangle = \int_0^1 \langle J'(v + t(u - v)) - J'(v), u - v\rangle dt.$$

Z warunku Lipschitza dla gradientu $J'(u)$ uzyskuje się

$$J(u) - J(v) - \langle J'(v), u - v\rangle \leq |\int_0^1 \langle J'(v + t(u - v)) - J'(v), u - v\rangle dt|$$

$$\leq \int_0^1 |J'(v + t(u - v)) - J'(v)||u - v|dt \leq \int_0^1 L|u - v|^2 t dt = L|u - v|^2.$$

Twierdzenie. Jeśli zredukowany wskaźnik jakości $J(u)$ spełnia na zwartym wypukłym zbiorze U warunek Lipschitza, to ciąg sterowań u^κ określony za pomocą metody rzutowania gradientu

$$u^{\kappa+1} = P_U(u^\kappa - \gamma^k J'(u^\kappa)), \ \gamma^\kappa \in [\epsilon_0, 2/(L + 2\epsilon_1)], \ \epsilon_1, \epsilon_2 > 0, \ \kappa = 0, 1, 2, ...$$

jest zbieżny do sterowania $u^\bullet$ spełniającego warunek optymalności na zbiorze U

$$\langle J'(u^\bullet), u - u^\bullet\rangle \geq 0 \ \ u \in U.$$

Metoda funkcji barierowych dla problemów sterowania optymalnego z ograniczeniami chwilowymi stanu

Problem optymalnego sterowania procesem dynamicznym z chwilowymi ograniczeniami stanu może polegać na minimalizacji kombinowanego wskaźnika jakości

$$G(x,u) = \int_0^\tau g(x(t),u(t),t)dt + h(x(\tau))$$

z uwzględnieniem

- równania stanu procesu z zadanym stanem początkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad t \in [0,\tau], \quad x(0) = x_0$$

- ograniczeń chwilowych niektórych współrzędnych stanu

$$\tilde{h}(x(t)) \le 0, \quad t \in [0,\tau],$$

oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \quad t \in [0,\tau],$$

gdzie $[0,\tau]$ jest przedziałem czasowym sterowania, $x \in W^1_\infty([0,\tau]; R^n)$ jest trajektorią stanu procesu, $u \in L_\infty([0,\tau]; R^m)$ jest jego sterowaniem, a

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \quad f : R^n \times R^m \times R \to R^n, \quad h : R^n \to R, \quad \tilde{h} : R^n \to R^p,$$

są, ogólnie biorąc, funkcjami nieliniowymi.

Standardowe twierdzenia o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego z zadanym warunkiem początkowym pozwalają uważać równanie stanu rozważanej klasy procesów za rozwikływalne względem stanu w funkcji sterowania. Określone jest więc odwzorowanie $x(t,u)$ jednoznacznie wyznaczające stan procesu w chwili t w funkcju sterowania u.

Na tej podstawie można zredukować rozważany problem do przestrzeni sterowania: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) \doteq \int_0^\tau g(x(t,u),u(t),t)dt + h(x(\tau,u))$$

z uwzględnieniem

- nierównościowych ograniczeń nieliniowych stanu chwilowego

$$\tilde{h}(x(t,u)) \leq 0, \quad t \in [0,\tau]$$

oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \quad t \in [0,\tau].$$

Te ostatnie ograniczenia mogą nie być włączone w sposób jawny do sformułowania niektórych problemów jeśli minimalizacja wskaźnika jakości automatycznie ogranicza amplitudę sterowania.

Aby zastosować algorytmy optymalizacji skończenie wymiarowej do rozważanego problemu celowo jest wprowadzić dwie, ogólnie biorąc, różne dyskretyzacje przedziału sterowania.

Dyskretyzacja $t_k \doteq k\tau/k_1, \quad k = 0, 1, ..., k_1 - 1$ związana jest z dyskretyzacją schodkową sterowania $u(t, \mathsf{u}) = \sum_{k=0}^{k_1-1} e_k(t)\mathsf{u}_k$.

Natomiast dyskretyzacja $\tilde{t}_k \doteq k\tau/k_2, \quad k = 0, 1, ..., k_2$ związana jest ze skończenie wymiarową aproksymacją ograniczeń chwilowych stanu $\tilde{h}_k(u) \leq 0, \quad k = 1, ..., k_2$, gdzie $\tilde{h}_k(u) \doteq \tilde{h}(\tilde{t}_k, u))$.

Ogólnie biorąc $k_1 \neq k_2$. Duża liczba k_2 punktów aproksymacji ograniczeń stanu chwilowego może zapewnić dobrą reprezentację ograniczeń trajektorii stanu $\tilde{h}(x(t,u)) \leq 0$ w całym przdziale sterowania $[0,\tau]$.

Dwuskalowa dyskretyzacja sprowadza rozpatrywany problem do zadania optymalizacji skończenie-wymiarowej typu: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(\mathsf{u}) \doteq \int_0^\tau g(x(t,\mathsf{u}), u(t,\mathsf{u}), t)dt + h(x(\tau,\mathsf{u}))$$

przy ograniczeniach

$$\tilde{h}_k(\mathsf{u}) \leq 0, \quad k = 1, 2, ..., k_2,$$

$$\mathsf{u}_k \in [u^-, u^+], \quad k = 0, 1, ..., k_1 - 1.$$

Przykład: Proces produkcyjny prowadzony w zbiornikowym reaktorze chemicznym polega na przemianie surowca A w produkt użyteczny B w rezultacie odwracalnej reakcji egzotermicznej wydzielającej energię cieplną. W charakterze zmiennych stanu i zmiennych sterujących wyróżnione są następujące wielkości: $x_1(t)$ - stężenie A w reaktorze w chwili t, $x_2(t)$ - temperatura w reaktorze w chwili t, $u_1(t)$ - natężenie dopływu katalizatora do reaktora oraz $u_2(t)$ - natężenie dopływu czynnika chłodzącego do tego reaktora. Równania stanu procesu mają postać

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 u_1(t) x_1^2(t) e^{-b_1/x_2(t)} + a_2 x_1(t) e^{-b_2/x_2(t)}, \;\; t \in [0,1], \;\; x_1(0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = a_3 u_1(t) x_1^2(t) e^{-b_1/x_2(t)} - a_4 u_2(t), \;\; t \in [0,1], \;\; x_2(0) = x_{20},$$

gdzie przyjęto jednostkowy przedział czasowy sterowania. Należy zminimalizować zawartość surowca w chwili końcowej procesu (tj. zmaksymalizować zawartość produktu użytecznego w chwili końcowej procesu)

$$J(u) \doteq x_1(1)$$

z uwzględnieniem ograniczenia temperatury chwilowej w reaktorze w przedziale sterowania

$$x_2(t) \leq \bar{x}_2, \;\; t \in [0,1]$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$u_j(t) \in [u_j^-, u_j^+], \;\; t \in [0,1].$$

Redukcja problemu do przestrzeni sterowania i jego dyskretyzacja pozwalają zapisać go w postaci zadania optymalizacji: zminimalizować wskaźnik jakości

$$J(\mathsf{u}) = x_1(1, \mathsf{u})$$

przy ograniczeniach

$$x_2(\tilde{t}_k, \mathsf{u}) \leq \bar{x}_2, \;\; k = 1, 2, ..., k_2,$$

$$\mathsf{u}_{jk} \in [u_j^-, u_j^+], \;\; j = 1, 2; \;\; k = 0, 1, ..., k_1 - 1.$$

Zastosowanie metody przesuwanej funkcji kary do wyznaczania optymalnego rozwiązania powyższego zadania jest utrudnione ze względu na konieczność wykonania znacznej liczby przesunięć tej funkcji w powiązaniu z obliczeniem naruszenia kolejnych ograniczeń. Lepsze rezultaty można uzyskać za pomocą metody funkcji barierowych, które "odpychają" obliczane sterowania od brzegu obszaru dopuszczalnego. Dla opisu tej metody celowo jest przeformułować zadania rozważanego typu do postaci: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(\mathsf{u})$$

przy ograniczeniach

$$h_k(u) \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., k_2,$$

$$u \in U,$$

gdzie nieliniowe ograniczenia nierównościowe są zapisane w postaci "większe niż zero lub równe zeru"

$$h_k(u) \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., k_2, \quad h_k(u) \doteq -\tilde{h}_k(u),$$

a U jest zbiorem ograniczeń zakresu zmiennych sterujących

$$U \doteq \{u \in R^{\bar{m}} : \quad u_k \in [u^-, u^+], \quad k = 0, 1, ..., k_1 - 1, \quad \bar{m} \doteq mk_1\}.$$

W przypadku braku jawnych ograniczeń zakresu zmiennych sterujących uwzględnianych pośrednio przez wskaźnik jakości problem obejmuje jedynie nieliniowe ograniczenia nierównościowe: zminimalizować

$$J(u)$$

przy ograniczeniach

$$h_k(u) \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., k_2.$$

W rezultacie zastosowania różnych funkcji barierowych uzyskuje się zadanie optymalizacji bez ograniczeń.

W metodzie funkcji barierowych Carolla minimalizowana jest zastępcza funkcja celu postaci

$$\Phi(u, \rho) \doteq \min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u) + \rho^{-1} \sum_{k=1}^{k_1} h_k^{-1}(u)\},$$

gdzie $\rho > 0$ jest współczynnikiem funkcji barierowej ($\rho \to +\infty$), zaś

$$h_k^{-1}(u)$$

jest funkcją barierową Carolla. Funkcja ta tworząc barierę na brzegu obszaru dopuszczalnego wprowadza też dodatni składnik w całym obszarze dopuszczalnym. Może to powodować nadmierne przesuwanie optymalizowanego sterowania do wnętrza obszaru dopuszczalnego.

W metodzie funkcji barierowych Frischa minimalizowana jest zastępcza funkcja celu postaci

$$\Phi(u, \rho) \doteq \min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u) - \rho^{-1} \sum_{k=1}^{k_1} ln(h_k(u))\},$$

gdzie $\rho > 0$ jest współczynnikiem funkcji barierowej, zaś

$$-ln(h_k(u))$$

jest funkcją barierową Frischa (logarytmiczną funkcją barierową). Funkcja ta tworząc barierę na brzegu obszaru dopuszczalnego wprowadza dodatni składnik tylko w pewnej strefie przygranicznej obszaru dopuszczalnego. Funkcja ta w mniejszym stopniu "odpycha" optymalizowane sterowania od brzegu obszaru dopuszczalnego.

Wskazane funkcje barierowe nie pozwalają wyznaczyć optymalnych sterowań przyjmujących wartości z brzegu obszaru dopuszczalnego, a optymalne sterowania przyjmujące wartości z wnętrza obszaru dopuszczalnego mogą być wyznaczone dokładnie jedynie przy współczynniku funkcji barierowej dążącym do nieskończoności. Aby uniknąć tych wad klasycznych funkcji barierowych zaproponowano różne ich modyfikacje.

Metoda zmodyfikowanych funkcji barierowych dla problemów sterowania optymalnego z ograniczeniami chwilowymi stanu

W metodzie zmodyfikowanych logarytmicznych funkcji barierowych stosowane jest przesunięcie tej funkcji, tak aby mogł ona dopuszczać rozwiązania brzegowe

$$\Phi(u, \rho) \doteq \min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u) - \rho^{-1} \sum_{k=1}^{k_1} ln(\rho h_k(u) + 1)\}.$$

W metodzie zmodyfikowanych mnożnikowych logarytmicznych funkcji barierowych minimalizowana jest zastępcza funkcja celu postaci

$$\Psi(u, \lambda, \rho) \doteq \min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u) - \rho^{-1} \sum_{k=1}^{k_1} \lambda^T ln(\rho h_k(u) + 1)\},$$

gdzie $\rho > 0$ jest współczynnikiem funkcji barierowej, $\lambda \in R^p$ jest mnożnikiem Lagrange'a, zaś

$$-\rho^{-1} ln(\rho h_k(u) + 1))$$

jest zmodyfikowaną logarytmiczną funkcją barierową.

Ta ostatnia metoda umożliwia wyznaczenie optymalnych sterowań zarówno z brzegu jak i z wnętrza obszaru dopuszczalnego przy skończonej wartości współczynnika funkcji barierowej.

Niech

$$L(u,\lambda) \doteq J(u) - \sum_{k=1}^{k_1} \lambda_k^T h_k$$

będzie funkcją Lagrange'a problemu wyjściowego i niech $\hat{u}$ będzie jego lokalnym minimum. Załóżmy, że minimum to spełnia standardowe warunki wystarczające optymalności rzędu drugiego tj.

- gradienty $h_k'(u)$ ograniczeń aktywnych $h_k(u) = 0, \quad k \in \bar{K}$ są liniowo niezależne, co oznacza, że istnieją jednoznacznie określone mnożniki Lagrange'a $\hat{\lambda}_k, \;\; k = 1, 2, ..., k_1$ związane z danym minimum,
- hesjan L_{uu} funkcji Lagrange'a w punkcie $(\hat{u}, \hat{\lambda})$ jest dodatnio określony na podprzestrzeni stycznej do zbioru rozwiązań dopuszczalnych

$$v^T L_{uu} v > 0, \;\; v^T h_k(\hat{u}), \;\; k \in \bar{K},$$

- zachodzą warunki ścisłej komplementarności

$$\lambda_k^T h_k(u) = 0, \;\; k = 0, 1, ..., k_1, \;\; \lambda_k > 0, \;\; k \in \bar{K}.$$

Jeśli są spełnione powyższe założenia, to można udowodnić, że zmodyfikowana logarytmiczna funkcja barierowa posiada w pewnym otoczeniu minimum dodatnio określony hesjan (jest ściśle wypukła w pewnym otoczeniu minimum)

$$\Psi_{uu}(\hat{u}, \hat{\lambda}, \rho) > 0.$$

Hesjan ten jest w związku z tym odwracalny i można zastosować metodę Newtona do minimalizacji funkcji bez ograniczeń

$$u^{\kappa+1} = u^{\kappa} - \gamma \Psi_{uu}^{-1}(\hat{u}, \hat{\lambda}, \rho) \Psi_u(\hat{u}, \hat{\lambda}, \rho).$$

Można udowodnić, że przeliczanie mnożników Lagrange'a według wzoru

$$\lambda_k^{\kappa+1} = \lambda_k^{\kappa} / (\rho h_k(\hat{u}) + 1)$$

zapewnia ich zbieżność do mnożników optymalnych.

Optymalizacja procesów w przestrzeni stanu i sterowania
Metoda punktu wewnętrznego

Dla szerokiej klasy problemów optymalnego sterowania celowo jest traktować łącznie zmienne stanu i zmienne sterujące jako niezależne zmienne decyzyjne. Równania stanu nie są rozwikływane lecz są traktowane jako ograniczenia równościowe. Liczba zmiennych decyzyjnych ulega w ten sposób zwiększeniu, jednak ułatwia to wkomponowanie różnorodnych ograniczeń stanu i sterowania do algorytmów optymalizacji. Rozwikływanie równania stanu jest użyteczne dla problemów o niewielkiej wymiarowości stanu i wielomianowych modelach procesu. W innych przypadkach (znaczna liczba zmiennych stanu, eksponencjalne zależności w modelach procesu) wymagane są czasochłonne procedury rozwiązywania równań stanu. Są też klasy równań stanu, które nie są rozwikływalne względem stanu w funkcji sterowania takie jak równania z uwikłaną pochodną lub równania statycznych procesów sterowania. Optymalizacja w przestrzeni stanu i sterowania umożliwia bezpośrednie obliczanie pochodnych pierwszego i drugiego rzędu względem całego zestawu zmiennych decyzyjnych, co pozwala stosować zaawansowane algorytmy optymalizacji wyznaczające rozwiązanie warunków koniecznych optymalności problemu.

Nawiązując w tym kontekście do optymalizacji nieliniowych statycznych problemów optymalizacji rozważymy proces optymalizacji egzotermicznej przemiany surowca A w produkt użyteczny B zachodzący w reaktorze zbiornikowym. Załóżmy, że temperatura w reaktorze jest bezpośrednio wymuszana za pomocą płaszcza grzejnego i silnego źródła ciepła. Niech x oznacza stężenie surowca A w reaktorze, zaś u temperaturę wymuszaną w nim.

Wskaźnik jakości procesu jest równoważny z maksymalizacją ilości produktu użytecznego B z uwzględnieniem kosztów nagrzewania tj. należy zminimalizować

$$x + cu$$

przy ograniczeniach w postaci statycznego równania stanu

$$0 = 1 - x - ae^{-b_1/(b_2+u)}x^2/(1+x^2)$$

oraz w postaci wymagania nieujemności zmiennych

$$x \geq 0,\ u \geq 0.$$

Postać równania stanu utrudnia jego rozwikływanie, więc stosujemy optymalizację procesu w przestrzeni stanu i sterowania tj. traktujemy łącznie (x, u) jako wektor zmiennych decyzyjnych.

Niech przebieg temperatury będzie wymuszany pośrednio za pomocą obwodu grzejnego i niech temperatura będzie drugą zmienną stanu.

Wskaźnik jakości procesu jest równoważny z maksymalizacją ilości produktu użytecznego B z uwzględnieniem kosztów nagrzewania tj. należy zminimalizować

$$x_1 + cu$$

przy statycznych równaniach stanu obejmujących bilans masy dla surowca A i bilans energii cieplnej w obiekcie

$$0 = 1 - x_1 - a_1 x_1^2 e^{-b_1/(b_2+x_2)},$$

$$0 = -a_2 x_1^2 e^{-b_1/(b_2+x_2)} + \frac{u}{a_3+u}(b_3 - x_2) + b_4 - x_2,$$

oraz przy wymaganiu nieujemności zmiennych procesowych

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u \geq 0.$$

Wartości zmiennych procesowych są ograniczone od góry przez minimalizację wskaźnika jakości (jeśli chodzi o zmienne x_1 i u) oraz przez endotermiczny charakter procesu (jeśli chodzi o x_2).

Dla celów optymalizacji w przestrzeni stanu i sterowania definiujemy nową zmienną procesową $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, gdzie $z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = u$. Problem przybiera postać: zminimalizować funkcję

$$z_1 + cz_2$$

przy ograniczeniach

$$0 = 1 - z_1 - a_1 z_1^2 e^{-b_1/(b_2+z_2)},$$

$$0 = -a_2 z_1^2 e^{-b_1/(b_2+z_2)} + \frac{z_3}{a_3+z_3}(b_3 - z_2) + b_4 - z_2,$$

$$z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0,$$

lub w skrócie

$$\min_{z \in R^p} \{\ g(z) :\quad f(z) = 0,\quad z \geq 0\},\quad (*)$$

gdzie $p = n + m$ jest łączną liczbą zmiennych procesowych, a

$$g(z) \doteq z_1 + cz_2,$$

$$f(z) \doteq \{1 - z_1 - a_1 z_1^2 e^{-b_1/(b_2+z_2)}, -a_2 z_1^2 e^{-b_1/(b_2+z_2)} + \frac{z_3}{a_3 + z_3}(b_3 - z_2) + b_4 - z_2\}^T.$$

Każdy problem z ograniczeniami nierównościowymi ogólnej postaci

$$\varphi(z) \leq 0$$

można sprowadzić do postaci równościowej stosując nieujemną zmienną dopełniającą s

$$\varphi(z) + s = 0, \quad s \geq 0.$$

Odwrotnie każde równanie

$$\varphi(z) = 0$$

można zastąpić równoważnym układem dwóch nierówności

$$\varphi(z) \leq 0, \quad \varphi(z) \geq 0.$$

Problem

$$\min_{z \in R^p} \{ g(z) : \quad f(z) = 0, \quad z \geq 0\}, \quad (*)$$

nazywamy problemem optymalizacji w postaci standardowej. Sprowadzamy go do problemu barierowego

$$\min_{z \in R^p} \{ g(z) - \mu \sum_{i=1}^{p} ln(z_i) : \quad f(z) = 0, \ \}, \quad (**),$$

gdzie dla ograniczeń nieujemności zmiennych zastosowano logarytmiczną funkcję barierową. Zakładamy, że ograniczenia równościowe spełniają warunek regularności dla lokalnego minimum $\hat{z}$

$$rank(f'(\hat{z})) = n,$$

co oznacza, że rząd macierzy Jacobiego jest równy licznbie ograniczeń aktywnych (gradienty ograniczeń aktywnych są liniowo niezależne).

Zapisujemy funkcję Lagrange'a problemu standardowego

$$L(z, \lambda) \doteq g(z) - \lambda^T f(z)$$

i funkcję Lagrange'a problemu barierowego

$$L(z, \lambda, \mu) \doteq g(z) - \mu \sum_{i=1}^{n} ln(z_i) - \lambda^T f(z),$$

gdzie $\lambda \in R^n$ jest mnożnikiem Lagrange'a dla ograniczeń równościowych.

Formułujemy warunki optymalności problemu barierowego pierwszego rzędu $L'_z(z, \lambda, \mu) = 0,\ L'_\lambda(z, \lambda, \mu) = 0$ tj.

$$g'(z) - \mu Z^{-1} e - \lambda^T f'(z) = 0,$$

$$f(z) = 0,$$

gdzie $Z^{-1} \doteq diag(z_1, z_2, ..., z_p),\ \ e \doteq (1, 1, ..., 1)^T \in R^p$.

Stosujemy podstawienie $v = \mu Z^{-1} e$, które określa tzw. dualne zmienne barierowe. Podstawienie to można zapisać w postaci równoważnej $ZVe = \mu e$, gdzie $V \doteq diag(v_1, v_2, ..., v_p)$.

Uzyskujemy w ten sposób nową postać warunków optymalności pierwszego rzędu

$$g'(z) - v - \lambda^T f'(z) = 0,$$

$$f(z) = 0,$$

$$ZVe - \mu e = 0.$$

Powyższy nieliniowy układ równań jest rozwiązywany metodą Newtona. Celem jej zastosowania określamy macierz Jacobiego układu i układ równań zlinearyzowanych Newtona.

$$\begin{pmatrix} L''_{zz}(z, \lambda) & -f'(z)^T & -I \\ -f'(z) & 0 & 0 \\ V & 0 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta \lambda \\ \delta v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g'(z) - v - \lambda^T f'(z) \\ -f(z) \\ VZe - \mu e \end{pmatrix}$$

Wektor $(\delta z, \delta \lambda, \delta v)^T$ wyznacza kierunek Newtona dla rozwiązywania układu warunków koniecznych optymalności problemu barierowego. Rozwiązanie wyznaczamy iteracyjnie dobierając krok σ w kierunku Newtona

$$z := z + \sigma \delta z,\ \lambda := \lambda + \sigma \delta \lambda,\ v := v + \sigma \delta v.$$

Długość kroku dobieramy minimalizując zmodyfikowaną funkcję Lagrange'a względem tej długości i zachowującograniczenie $z \geq 0$ (stąd nazwa metoda ścieżki centralnej)

$$\mathcal{L}(z + \sigma z) \doteq g(z + \sigma z) - \mu \sum_{i=1}^{p} ln((z_i + \sigma z_i)^{-1}) - \lambda^T f(z + \sigma z) + \rho |f(z + \sigma z)|.$$

W charakterze kryterium stopu przyjmujemy stopień naruszenia warunków optymalności ϵ

$$|g'(z) - v - \lambda^T f'(z)| + |f(z)| + |VZe - \mu e| < \epsilon.$$

Problemy optymalizacji w przestrzeni stanu i sterowania z ograniczeniami postaci innej niż standardowa mogą być sprowadzone do tej postaci za pomocą dodatkowych zmiennych dopełniających np. ograniczenia nierównościowe

$$\varphi(z) \leq 0$$

sprowadzamy do postaci równościowej

$$\varphi(z) + s = 0, \;\; s \geq 0,$$

gdzie s jest nieujemną zmienną dopełniającą.

Do postaci standardowej umożliwiającej zastosowanie metody punktu wewnętrznego sprowadzane są także problemy optymalizacji dynamicznej w przestrzeni stanu i sterowania. Pełna dokładna dyskretyzacja równań stanu dla układów o parametrach skupionych prowadzi do problemów aproksymujących z tysiącami zmiennych i ograniczeń, zaś dla układów o parametrach rozłożonych - do problemów z setkami tysięcy zmiennych i ograniczeń. Mimo tego wysoka efektywność współczesnych komputerów w powiązaniu z zaawansowanymi technikami dekompozycji macierzy pozwalają stosować metodę punktu wewnętrznego dla problemów o tak dużym stopniu złożoności.

Niech problem sterowania optymalnego dla układu o parametrach skupionych ma postać: zminimalizować wskaźnik jakości

$$\int_0^1 g(x(t), u(t))dt + h(x(1))$$

uwzględniając ograniczenia

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \;\; t \in [0, 1], \;\; x(0) = x_0,$$

$$x^- \leq x(t) \leq x^+, \;\; u^- \leq u(t) \leq u^+, \;\; t \in [0, 1].$$

Jeśli zastąpić pochodną prawostronnym ilorazem różnicowym, to aproksymacja (jednokrokowa) problemu przybierze postać

$$\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} g(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k)/\bar{k} + h(\mathrm{x}_{\bar{k}}),$$

$$\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_k = \delta_k f(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k),\ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1,\ \mathrm{x}_0 = x_0,$$

$$x_i^- \leq \mathrm{x}_k \leq x_i^+,\ \ k = 1, 2, ..., \bar{k},\ \ u_i^- \leq \mathrm{u}_k \leq u_i^+,\ \ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1,$$

gdzie $\mathrm{x}_k \doteq x(k/\bar{k})$ jest zdyskretyzowanym sterowaniem, $\mathrm{u}_k \doteq u(k/\bar{k})$ jest zdyskretyzowanym sterowaniem, a δ_k jest krokiem dyskretyzacji. Dyskretyzacja taka zapewnia możliwość bezpoźredniego obliczania pochodnych pierwszego i drugiego rzędu funkcji celu i warunków ograniczających.

Jeśli zastąpić pochodną symetrycznym ilorazem różnicowym, to aproksymacja (dwukrokowa) problemu przybierze postać

$$\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} g(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k)/\bar{k} + h(\mathrm{x}_{\bar{k}}),$$

$$\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_{k-1} = 2\delta_k f(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k),\ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1,\ \mathrm{x}_0 = x_0,\ \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_0 + 2\delta_0 f(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0),$$

$$x_i^- \leq \mathrm{x}_k \leq x_i^+,\ \ k = 1, 2, ..., \bar{k},\ \ u_i^- \leq \mathrm{u}_k \leq u_i^+,\ \ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1.$$

W powyższych przykładach zastosowano stosunkowo mało dokładną jawną aproksymację równań stanu. Dokładniejsze wyniki można uzyskać stosując niejawną aproksymację tych równań.

Jeśli do aproksymacji równań stanu zastosować wzór trapezów, to niejawna dyskretyzacja problemu przybierze postać

$$\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} g(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k)/\bar{k} + h(\mathrm{x}_{\bar{k}}),$$

$$\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_{k-1} = 0.5\delta_k(f(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k) - f(\mathrm{x}_{k+1}, \mathrm{u}_{k+1}),\ \ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1,$$

$$\mathrm{x}_0 = x_0,\ \ \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_0 + 2\delta_0 f(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0),$$

$$x_i^- \leq \mathrm{x}_k \leq x_i^+,\ \ k = 1, 2, ..., \bar{k},\ \ u_i^- \leq \mathrm{u}_k \leq u_i^+,\ \ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1.$$

Jeśli do aproksymacji równań stanu zastosować wzór punktu środkowego, to niejawna dyskretyzacja problemu przybierze postać

$$\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} g(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k)/\bar{k} + h(\mathrm{x}_{\bar{k}}),$$

$$\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_k = \delta_k(f(\mathrm{x}_k, \mathrm{u}_k) + f(\mathrm{x}_{k+1}, \mathrm{u}_{k+1}),\ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1,$$

$$\mathrm{x}_0 = x_0,\ \ \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_0 + 2\delta_0 f(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0),$$

$$x_i^- \leq \mathrm{x}_k \leq x_i^+,\ \ k = 1, 2, ..., \bar{k},\ \ u_i^- \leq \mathrm{u}_k \leq u_i^+,\ \ k = 0, 1, ..., \bar{k} - 1.$$

W układach sterowania procesami o parametrach rozłożonych wyróżniamy zmienną czasową $t \in [t_0, t_1]$ i zmienną przestrzenną $s \in [0, 1]$. Zmienne procesowe są funkcjami, ogólnie biorąc, zmiennej czasowej i zmiennej przestrzennej:

- $x(t, s)$ - stan procesu,
- $x_t(t, s)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej czasowej,
- $x_s(t, s)$ - pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej,
- $x_{ss}(t, s)$ - druga pochodna cząstkowa stanu względem zmiennej przestrzennej.

Problem optymalnego transferu ciepła może polegać na minimalizacji

- **wskaźnika jakości**

$$\int_0^1 (x(t,1) - r(t))^2 dt + \rho \int_0^1 u^2(t) dt$$

określonego dla dynamicznego rozłożonego stanu procesu $x \in W_2^1([0,1] \times [0,1], R^{n_x})$ i jego dynamicznego sterowania brzegowego $u \in L_2([0,1], R^{n_u})$ i interpretowanego jako osiąganie zadanego przebiegu temperatury $r(t)$ na jednym brzegu obiektu z jedną zmienną przestrzenną przy założeniu, że sterowanie (źródło ciepła) oddziaływuje na drugim jego brzegu z uwzględnieniem

- **dynamicznego równania stanu** w postaci równania przewodnictwa cieplnego

$$x_t(t, s) = a x_{ss}(t, s) - b x(t, s), \quad t \in [0, 1]$$

z warunkiem początkowym

$$x(0, s) = x_0(s), \quad s \in [0, 1],$$

i z warunkami brzegowymi

$$x(t, 0) - \alpha x_s(t, 0) = u(t), \quad x_s(t, 1) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

oraz z ograniczeniami chwilowymi stanu rozłożonego obiektu (zapobieganie przegrzaniu obiektu)

$$x(t, s) \leq x^{max}, \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Aproksymacja pochodnej cząstkowej stanu względem czasu za pomocą prawostronnego ilorazu różnicowego pierwszego rzędu przybiera postać

$$x_t(t,s) \approx \frac{\mathrm{x}_{k+1,l} - \mathrm{x}_{kl}}{\delta_1},$$

zaś aproksymacja drugiej pochodnej cząstkowej stanu względem zmiennej przestrzennej za pomocą symetrycznego ilorazu różnicowego drugiego rzędu przybiera postać

$$x_{ss}(t,s) \approx \frac{\mathrm{x}_{k,l+1} - 2\mathrm{x}_{kl} + \mathrm{x}_{k,l-1}}{\delta_2^2}.$$

Prowadzi to do następującej siatkowej aproksymacji równania stanu procesu

$$\frac{\mathrm{x}_{k+1,l} - \mathrm{x}_{kl}}{\delta_1} = \tilde{\alpha}\frac{\mathrm{x}_{k,l+1} - 2\mathrm{x}_{kl} + \mathrm{x}_{k,l-1}}{\delta_2^2} - b\mathrm{x}(k,l),\ k = 0,1,...,\bar{k}-1,\ \ l = 1,...,\bar{l}$$

z aproksymowanymi warunkami początkowymi

$$\mathrm{x}_{0,l} = x_0(l),\ \ l = 0,1,...,\bar{l},$$

i brzegowymi

$$\mathrm{x}_{k,0} - \alpha(\mathrm{x}_{k,1} - \mathrm{x}_{k,0})/\delta_2 = u_k,\ \ (\mathrm{x}_{k,\bar{l}+1} - \mathrm{x}_{k,\bar{l}})/\delta_2,\ \ k = 0,1,...,\bar{k}-1$$

oraz aproksymowanymi ograniczeniami stanu

$$\mathrm{x}_{k,l} \leq x^{max},\ \ k = 0,1,...,\bar{k},\ \ l = 0,1,...,\bar{l}.$$