Optymalizacja procesów sterowania z opóźnieniami

Problem sterowania optymalnego procesami z opóźnieniami stanu polega na minimalizacji wskaźnika jakości

$$G(x,u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), x(t-r), u(t), t)dt + h(x(t_1))$$

z uwzględnieniem równania dynamiki procesu ze skupionym
opóźnieniem stanu r

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

i z zadanym funkcyjnym warunkiem początkowym

$$x(t) = \xi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0]$$

oraz z uwzględnieniem ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Stan funkcyjny $x(t), \ t \in [t_0 - r, t_0]$ nazywa się stanem zupełnym procesu z opóźnieniami. Jeśli zadany jest zupełny stan początkowy takiego procesu i jego sterowanie, to równanie stanu procesu z opóźnieniami posiada jednoznaczne rozwiązanie w przedziale sterowania $[t_0, t_1]$. Wektor $x(t)$ nazywa się stanem chwilowym procesu z opóźnieniami.

W dalszym ciągu stosowane są oznaczenia $g(x, \tilde{x}, u, t)$, $f(x, \tilde{x}, u, t)$, gdzie $\tilde{x}$ jest argumentem opóźnionym funkcji g i f. Na funkcję g nakładany jest warunek $g(x, \tilde{x}, 0, t) = 0$ co oznacza, że wyzerowanie sterowania wyzerowuje składową całkową wskaźnika jakości. Warunek taki upraszcza obliczanie gradientu wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania.

Z uwagi na złożony charakter dynamiki klasy rozważanych procesów do ich optymalizacji stosowane są w pierwszej kolejności metody kierunków poprawy takie jak metoda najszybszego spadku z antygradientem jako kierunkiem poprawy (jeśli $U = R^m$) lub z rzutowanym antygradientem jako kierunkiem poprawy (jeśli U jest wypukłym zbiorem domkniętym). Wzór na gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania procesu z opóźnieniami można uzyskać stosując metodę wariacji funkcjonału Lagrange'a w postaci

$$L(\eta, x, u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), x(t-r), u(t), t)dt + h(x(t_1))$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), x(t-r), u(t), t))dt + \int_{t_0-r}^{t_0} \eta^T(t)(x(t) - \xi(t))dt.$$

Jeśli $U = R^m$, to warunek konieczny optymalności procesu sterowania przybiera postać zerowania się pierwszych wariacji funkcjonału Lagrange'a

$$L_\eta \delta\eta = 0, \quad L_x \delta x = 0, \quad L_u \delta u = 0,$$

przy czym wariacja stanu w przedziale początkowym jest zerowa $\delta x(t) = 0,\ t \in [t_0 - r, t_0]$ ponieważ ustalony jest warunek początkowy $\xi(t),\ t \in [t_0 - r, t_0]$.

Zerowanie się wariacji funkcjonału L względem zmiennej sprzężonej η prowadzi do równania stanu z funkcyjnym warunkiem początkowym

$$L_\eta \delta\eta = 0 \Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r), u(t), t),\ t \in [t_0, t_1], \quad x(t) = \xi(t),\ t \in [t_0-r, t_0].$$

Zerowanie się wariacji funkcjonału L względem zmiennej stanu x prowadzi do równania sprzężonego z funkcyjnym warunkiem końcowym

$$L_x \delta x = 0 \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} (g_x(t)\delta x(t) + g_{\tilde{x}}(t)\delta x(t-r))dt + h_x(x(t_1))\delta x(t_1) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)(\delta\dot{x}(t) - f_x(t)\delta x(t) - f_{\tilde{x}}(t)\delta x(t-r))dt = 0.$$

Podstawienia

$$\tilde{t} \doteq t - r, \quad \int_{t_0}^{t_1} ...dt \to \int_{t_0-r}^{t_1-r} ...d\tilde{t},$$

$$g_{\tilde{x}}(t) \to g_{\tilde{x}}(\tilde{t} + r), \quad \eta^T(t) f_{\tilde{x}}(t) \to \eta^T(\tilde{t} + r) f_{\tilde{x}}(t + r)$$

prowadzą do wyrażenia

$$\int_{t_0}^{t_1} (g_x(t) - \eta^T(t) f_x(t))\delta x(t)dt + \int_{t_0-r}^{t_1-r} (g_{\tilde{x}}(\tilde{t} + r) - \eta^T(\tilde{t} + r) f_{\tilde{x}}(\tilde{t} + r)\delta x(\tilde{t})d\tilde{t}$$

$$+ h_x(x(t_1))\delta x(t_1) + \eta^T(t_1)\delta x(t_1) - \eta^T(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^T(t)\delta x(t)dt = 0.$$

Zakładamy funkcyjny warunek końcowy na zmienne sprzężone w przedziale wyprzedzającym moment końcowy przedziału sterowania

$$\eta(t) = -h_x(x(t_1)), \quad t \in [t_1, t_1 + r]$$

i zerowe sterowanie w tym przedziale tj. $u(t) = 0,\ t \in [t_1, t_1 + r]$. Bierzemy pod uwagę warunek $\delta x = 0,\ t \in [t_0 - r, t_0]$. Stosując ponownie zamianę czasu

$$t \to \tilde{t}, \quad \int_{t_0}^{t_1} ...dt \to \int_{t_0-r}^{t_1-r} ...d\tilde{t}.$$

uzyskujemy wyrażenie

$$\int_{t_0}^{t_1} (g_x(t) + g_{\tilde{x}}(t+r) - \eta^T(t) f_x(t) - \eta^T(t+r) f_{\tilde{x}}(t+r) - \dot{\eta}^T(t))\delta x(t)dt = 0.$$

Uzyskujemy w ten sposób równanie sprzężone dla procesu z opóźnieniami jako równanie różniczkowe z wyprzedzeniem

$$\dot{\eta}^T(t) = -\eta^T(t) f_x(t) - \eta^T(t+r) f_{\tilde{x}}(t+r) + g_x(t) + g_{\tilde{x}}(t+r)$$

i z funkcyjnym warunkiem końcowym

$$\eta^T(t) = -h_x(x(t_1)), \quad t \in [t_1, t_1 + r].$$

Transpozycja i podstawienie zmiennych procesowych daje w wyniku pełną postać równania sprzężonego dla procesu z opóźnieniem stanu jako wektorowego równania różniczkowego z wyprzedzeniem

$$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t), x(t-r), u(t), t)\eta(t) - f_{\tilde{x}}^T(x(t+r), x(t), u(t+r), t)\eta(t+r)$$
$$+ g_x^T(x(t), x(t-r), u(t), t) + g_{\tilde{x}}^T(x(t+r), x(t), u(t+r), t)$$

z funkcyjnym warunkiem końcowym

$$\eta(t) = -h_x(x(t_1)),\ t \in [t_1, t_1 + r].$$

Zerowanie się wariacji funkcjonału L względem sterowania prowadzi do wzoru na gradient wskaźnika jakości procesu z opóźnieniami zredukowanego do przestrzeni sterowania

$$L_u \delta u = 0 \Leftrightarrow -\int_{t_0}^{t_1} H_u(\eta(t), x(t), x(t-r), u(t), t)\delta u(t)dt = 0,$$

gdzie

$$H(\eta(t), x(t), x(t-r), u(t), t) \doteq -g(x(t), x(t-r), u(t), t) + \eta^T(t) f(x(t), x(t-r), u(t), t)$$

jest funkcją Hamiltona problemu optymalnego sterowania procesami z opóźnieniami. Oznacza to, że wspomniany gradient wyraża się wzorem

$$J_u(u)(t) = -H_u(\eta(t), x(t), x(t-r), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

W prostych przypadkach sterowanie optymalne można wyznaczyć z równania $H_u(\eta(t), x(t), x(t-r), u(t), t) = 0$ np. na podstawie przebiegu zmiennych sprzężonych. W trudniejszych przypadkach można posłużyć się metodami kierunków poprawy.

Metoda kierunków poprawy dla klasy rozważanych problemów sterowania może być określona następująco

• określ początkowe sterowanie i funkcyjny warunek początkowy stanu,

• wyznacz rozwiązanie równania stanu z opóźnieniem stanu,

• wyznacz rozwiązanie równania sprzężonego z wyprzedzeniem zmiennej sprzężonej,

• oblicz gradient wskaźnika jakości w przestrzeni funkcyjnej sterowania jako pochodną funkcji Hamiltona problemu sterowania z opóźnieniami,

• oblicz nowe sterowanie w kierunku antygradientu $u^+ = u - \gamma J_u^T(u)$ (jeśli $U = R^m$) lub w kierunku rzutowanego antygradientu $u^+ = \pi_U(u - \gamma J_u^T(u))$ jeśli U jest domkniętym zbiorem wypukłym z długością kroku γ określoną w wyniku minimalizacji kierunkowej wskaźnika jakości.

Przykład: Minimalizacja odchylenia oscylatora liniowego z opóźnieniem stanu od położenia równowagi.

Zmiennymi procesowymi są

• $x_1(t)$ - położenie oscylatora w chwili t,

• $x_2(t)$ - prędkość oscylatora w chwili t,

• $u(t)$ - siła stabilizująca w chwili t.

Należy zminimalizować odchylenie oscylatora z opóźnieniem amotyzatora od położenia równowagi z uwzględnieniem strat energetycznych na sterowanie

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) + c\int_0^1 u^2(t)dt$$

przy ograniczeniach w postaci równań stanu z opóźnieniem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_1(t - r) + u(t), \quad t \in [0, 1],$$

z funkcyjnym warunkiem początkowym

$$x_1(t) = \bar{x}_1, \quad t \in [-r, 0],$$

$$x_2(t) = \bar{x}_2, \quad t \in [-r, 0].$$

Zakładamy, że siła ściągająca amortyzatora przejawia swoje działanie po upływie czasu r, co implikuje opóźnienie w drugim równaniu stanu.

Równania sprzężone przyjmują postać liniowych równań z wyprzedzeniem

$$\dot{\eta}_1(t) = a\eta_2(t + r), \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{\eta}_2(t) = -\eta_1(t), \quad t \in [0, 1]$$

z warunkami końcowymi

$$\eta_1(t) = -2x_1(1), \quad t \in [1, 1 + r],$$

$$\eta_2(t) = -2x_2(2), \quad t \in [1, 1 + r].$$

Zapisujemy funkcję Hamiltona problemu

$$H(t) = -cu^2(t) + \eta_1(t)x_2(t) + \eta_2(t)(-ax_1(t - r) + u(t))$$

i jej pochodną

$$H_u(t) = -2cu(t) + \eta_2(t).$$

Z równania $H_u(t) = 0$ wynika, że sterowanie optymalne wyrazi się wzorem

$$u^o(t) = \frac{1}{2c}\eta_2(t), \quad t \in [0, 1].$$

W tym prostym przykładzie rozwiązujemy liniowe opóźnione równania stanu, liniowe wyprzedzone równania sprzężone i określamy sterowanie optymalne na podstawie przebiegu zmiennych sprzężonych.

Przykład: Minimalizacja odchylenia stabilnego oscylatora nieliniowego z opóźnieniem stanu od położenia równowagi.

Zmiennymi procesowymi są

- $x_1(t)$ - położenie oscylatora w chwili t,
- $x_2(t)$ - prędkość oscylatora w chwili t,
- $u(t)$ - siła stabilizująca w chwili t.

Należy zminimalizować odchylenie niestabilnego nieliniowego oscylatora z opóźnieniem amotyzatora od położenia równowagi z uwzględnieniem strat energetycznych na sterowanie

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) + c\int_0^1 u^2(t)dt$$

przy ograniczeniach w postaci równań stanu z opóźnieniem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_1(t-r) - \tilde{a}x_1^3(t-r) + u(t), \quad t \in [0, 1],$$

z funkcyjnym warunkiem początkowym

$$x_1(t) = \bar{x}_1, \quad t \in [-r, 0],$$

$$x_2(t) = \bar{x}_2, \quad t \in [-r, 0].$$

Zakładamy, że siła ściągająca amortyzatora przejawia swoje działanie po upływie czasu r, co implikuje opóźnienie w drugim równaniu stanu.

Równania sprzężone przyjmują postać nieliniowych równań z wyprzedzeniem

$$\dot{\eta}_1(t) = (a + 2\tilde{a}x_1^2(t))\eta_2(t+r), \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{\eta}_2(t) = -\eta_1(t), \quad t \in [0, 1]$$

z warunkami końcowymi

$$\eta_1(t) = -2x_1(1), \quad t \in [1, 1+r],$$

$$\eta_2(t) = -2x_2(2), \quad t \in [1, 1+r].$$

Przykład: Minimalizacja odchylenia oscylatora nieliniowego z opóźnieniem stanu i z ograniczonym obszarem stabilności lokalnej od położenia równowagi.

Zmiennymi procesowymi są

- $x_1(t)$ - położenie oscylatora w chwili t,
- $x_2(t)$ - prędkość oscylatora w chwili t,

- $u(t)$ - siła stabilizująca w chwili t.

Należy zminimalizować odchylenie niestabilnego nieliniowego oscylatora z opóźnieniem amotyzatora od położenia równowagi z uwzględnieniem strat energetycznych na sterowanie

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) + c \int_0^1 u^2(t)dt$$

przy ograniczeniach w postaci równań stanu z opóźnieniem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_1(t-r) + \tilde{a}x_1^3(t-r) + u(t), \quad t \in [0, 1],$$

z funkcyjnym warunkiem początkowym

$$x_1(t) = \bar{x}_1, \quad t \in [-r, 0],$$

$$x_2(t) = \bar{x}_2, \quad t \in [-r, 0].$$

Zakładamy, że siła ściągająca amortyzatora przejawia swoje działanie po upływie czasu r, co implikuje opóźnienie w drugim równaniu stanu.

Równania sprzężone przyjmują postać nieliniowych równań z wyprzedzeniem

$$\dot{\eta}_1(t) = (a - 2\tilde{a}x_1^2(t))\eta_2(t+r), \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{\eta}_2(t) = -\eta_1(t), \quad t \in [0, 1]$$

z warunkami końcowymi

$$\eta_1(t) = -2x_1(1), \quad t \in [1, 1+r],$$

$$\eta_2(t) = -2x_2(2), \quad t \in [1, 1+r].$$

W ostatnich dwóch przypadkach równania stanu i równania sprzężone mają charakter nieliniowy. Do optymalizacji stosowane są metody kierunków poprawy z obliczaniem gradientu zredukowanego wskaźnika jakości za pomocą równań sprzężonych.

Przykład: Maksymalizacja uzysku biomasy we wsadowym bioreaktorze sterowanym za pomocą biokatalizatora. Zmiennymi procesowymi są

- $x_1(t)$ - stężenie substratu w bioreaktorze w chwili t,
- $x_2(t)$ - stężenie populacji mikrobiologicznej w bioreaktorze w chwili t,
- $u(t)$ - intensywność dozowania biokatalizatora w chwili t.

Należy zmaksymalizować stężenie populacji mikrobiologicznej w momencie końcowym cyklu funkcjonowania bioreaktora wsadowego ($t_0 = 0,\ t_1 = 1$)

$$G(x,u) \doteq -x_2(1) \to min$$

uwzględniając równania dynamiki procesu z opóźnieniem stanu

$$\dot{x}_1(t) = -u(t)x_1(t)ax_2(t)/(b + x_2(t)),\ \ t \in [0,1],$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)x_1(t-r)ax_2(t)/(b + x_2(t)),\ \ t \in [0,1],$$

i z funkcyjnym warunkiem początkowym

$$x_1(t) = \bar{x}_1,\ t \in [-r, 0],$$

$$x_2(t) = \bar{x}_2,\ t \in [-r, 0]$$

oraz z ograniczeniem chwilowym sterowania

$$u(t) \in [0,1],\ \ t \in [0,1].$$

Równania sprzężone przybierają postać równań różniczkowych z wyprzedzeniem

$$\dot{\eta}_1(t) = u(t)\frac{ax_2(t)}{b + x_2(t)}\eta_1(t) - u(t+r)\frac{ab}{b + x_2(t)}\eta_2(t+r),\ t \in [0,1],$$

$$\dot{\eta}_2(t) = u(t)x_1(t)\frac{ab}{(b + x_2)^2}\eta_1(t) - u(t+r)x_1(t)\frac{ab}{(b + x_2(t))^2}\eta_2(t+r),\ t \in [0,1],$$

i z funkcyjnymi warunkami końcowymi

$$\eta_1(t) = 0,\ \ t \in [1, 1+r],$$

$$\eta_2(t) = x_2(1),\ \ t \in [1, 1+r].$$

Funkcję Hamiltona problemu można zapisać jak następuje

$$H(t) = -\eta_1(t)u(t)x_1(t)\frac{ax_2(t)}{b + x_2(t)} + \eta_2(t)u(t)x_1(t-r)\frac{ax_2(t)}{b + x_2(t)},$$

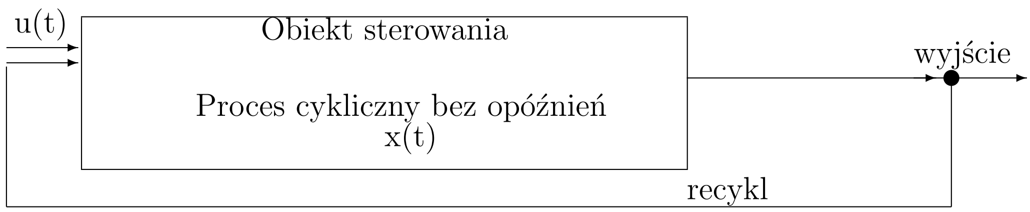
a gradient wskaźnika jakości jako funkcję

$$H_u(t) = -\eta_1(t)x_1(t)\frac{ax_2(t)}{b + x_2(t)} + \eta_2(t)x_1(t-r)\frac{ax_2(t)}{b + x_2(t)}.$$

Optymalne sterowanie cykliczne procesów ze skupionymi opóźnieniami stanu i sterowania

Modele procesów cyklicznych z opóźnieniami

• Procesy z opóźnieniami recyrkulacyjnymi



Przykład: Rozważmy proces sterowania cyklicznego **stężeniem substancji surowcowej** A wprowadzanej do zbiornikowego reaktora chemicznego o działaniu ciągłym, gdzie zachodzi jej przemiana w produkt użyteczny B. Oznaczmy

• $u(t)$ - stężenie substancji A w strumieniu wejściowym reaktora w chwili t,

• $x(t)$ - stężenie substancji A w reaktorze w chwili t,

• $q = 1$ - jednostkowe natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor,

Równanie stanu procesu cyklicznego bez opóźnień ma postać

$$\dot{x}(t) = u(t) - x(t) - x^2(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Obiekt sterowania zostaje objęty recyklem wprowadzającym opóźnienie stanu.

• $h \in [0, \tau]$ - opóźnienie wprowadzane przez recykl,

- γ - współczynnik recyklu.

Równanie stanu procesu cyklicznego z opóźnieniem recyrkulacyjnym przybiera postać

$$\dot{x}(t) = (1-\gamma)u(t) + \gamma x(t-h) - x(t) - x^2(t), \quad t \in [0, \tau],$$

Problem optymalnego sterowania cyklicznego dla rozważanego przykładu polega na maksymalizacji wydajności procesu (tj. na minimalizacji średniej ilości nieprzereagowanej substancji surowcowej)

$$Q(x, u) = -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) dt$$

z uwzględnieniem równania stanu

$$\dot{x}(t) = (1-\gamma)u(t) + \gamma x(t-h) - x(t) - x^2(t), \quad t \in [0, \tau],$$

chwilowych ograniczeń stanu i sterowania

$$x(t) \geq 0, \quad 0 \leq u(t) \leq 2, \quad t \in [0, \tau],$$

oraz średniej wydajności źródła surowca

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(t) dt = 1.$$

Problem optymalnego sterowania statycznego dla rozważanego przykładu polega na maksymalizacji wydajności procesu na poziomie statycznym (tj. na minimalizacji średniej ilości nieprzereagowanej substancji surowcowej na poziomie statycznym)

$$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{u}) = -\bar{x}$$

z uwzględnieniem statycznego równania stanu

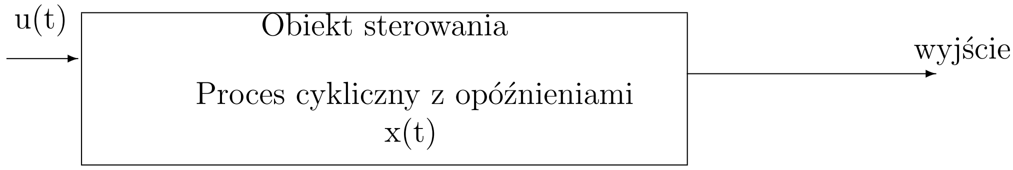
$$0 = (1-\gamma)\bar{u} + \gamma \bar{x} - \bar{x} - \bar{x}^2,$$

ograniczeń zakresu zmiennych oraz statycznego poziomu eksploatacji źródła surowca

$$\bar{x} \geq 0, \quad 0 \leq \bar{u} \leq 2, \quad \bar{u} = 1.$$

W statycznej wersji problemu zanika zależność równań stanu od opóźnienia h.

• Procesy z opóźnieniami wewnętrznymi



Przykład: Rozważmy proces sterowania cyklicznego **stężeniem wejściowym substratu** A wprowadzanego do zbiornikowego bioreaktora o działaniu ciągłym, gdzie zachodzi jego przemiana w biomasę dokonywana przez populację mikrobiologiczną P zainstalowaną w bioreaktorze. Substratem może być specjalnie dobrana pożywka dla populacji P (produkcja farmaceutyków), a także ścieki lub odpady (procesy biooczyszczania). Oznaczmy

• $u(t)$ - stężenie substratu A w strumieniu wejściowym bioreaktora w chwili t,

• $x_1(t)$ - stężenie substratu A w bioreaktorze w chwili t,

• $x_2(t)$ - stężenie populacji P w bioreaktorze w chwili t,

• $q = 1$ - jednostkowe natężenie przepływu biomieszaniny przez bioreaktor,

Równania stanu cyklicznego bioprocesu bez opóźnień mają postać

• dla substratu

$$\dot{x}_1(t) = u(t) - x_1(t) - \mu(x_1(t))x_2(t) \quad t \in [0, \tau],$$

• dla populacji mikrobiologicznej

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \tilde{\mu}(x_1(t))x_2(t) \quad t \in [0, \tau],$$

gdzie $\mu(x_1)$ jest funkcją przyrostu populacji np. $\mu(x_1) \doteq x_1/(a + x_1)$ (funkcja Monoda przyrostu populacji z nasyceniem) lub $\mu(x_1) \doteq x_1^\beta$ (potęgowa funkcja przyrostu populacji), przy czym $\tilde{\mu} = \mu_0\mu$ (skalowania funkcji przyrostu populacji).

Dla niektórych bioprocesów charakterystyczne jest opóźnienie szybkości przyrostu populacji po zmianie stężenia substratu. Równania stanu cyklicznego bioprocesu z opóźnieniami przybierają postać

- dla substratu

$$\dot{x}_1(t) = u(t) - x_1(t) - \mu(x_1(t))x_2(t) \;\; t \in [0, \tau],$$

- dla populacji mikrobiologicznej

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \tilde{\mu}(x_1(t-h))x_2(t) \;\; t \in [0, \tau],$$

gdzie $h \in [0, \tau]$ jest opóźnieniem przyrostu populacji za zmianami stężenia substratu.

Problem optymalnego sterowania cyklicznego dla rozważanego przykładu polega na maksymalizacji wydajności procesu (tj. na maksymalizacji średniego uzysku biomasy proporcjonalnej do stężenia populacji mikrobiologicznej)

$$Q(x, u) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x_2(t)dt$$

z uwzględnieniem równań stanu

- dla substratu

$$\dot{x}_1(t) = u(t) - x_1(t) - \mu(x_1(t))x_2(t) \;\; t \in [0, \tau]$$

- i dla populacji mikrobiologicznej

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \tilde{\mu}(x_1(t-h))x_2(t) \;\; t \in [0, \tau],$$

chwilowych ograniczeń stanu i sterowania

$$x_i(t) \geq 0, \;\; 0 \leq u(t) \leq 2, \;\; t \in [0, \tau],$$

oraz średniej wydajności źródła surowca

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(t)dt = 1.$$

Problem optymalnego sterowania statycznego dla rozważanego przykładu polega na maksymalizacji wydajności procesu na poziomie statycznym (tj. na maksymalizacji uzysku biomasy na poziomie statycznym)

$$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}_2$$

z uwzględnieniem statycznych równań stanu

- dla substratu
$$0 = \bar{u} - \bar{x}_1 - \mu(\bar{x}_1)\bar{x}_2$$
- i dla populacji mikrobiologicznej
$$0 = -\bar{x}_2 + \tilde{\mu}(\bar{x}_1)\bar{x}_2,$$

ograniczeń zakresu zmiennych oraz statycznego poziomu eksploatacji źródła surowca
$$\bar{x}_i \geq 0, \;\; 0 \leq \bar{u} \leq 2, \;\; \bar{u} = 1.$$
Statyczna wersja problemu nie zależy od opóźnienia h.

Problem optymalnego sterowania cyklicznego (OSC) procesami ze skupionymi opóźnieniami stanu i sterowania polega na maksymalizacji wskaźnika jakości w postaci wartości średniej funkcji zysku chwilowego
$$Q(x,u) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(x(t),u(t))dt$$
przy ograniczeniach obejmujących równanie stanu ze stałymi skupionymi opóźnieniami stanu i sterowania
$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h_1), u(t), u(t-h_2), \;\; t \in [0,\tau],$$
zakresy dopuszczalnych wartości stanu i sterowania
$$x(t) \in X, \;\; u(t) \in U, \;\; t \in [0,\tau]$$
oraz średnią wydajność źródeł surowców i energii wykorzystywanych do realizacji procesu
$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau Bu(t)dt = u_s,$$
gdzie $x \in H_\tau^{1,n}$ jest cykliczną trajektorią stanu procesu, $u \in H_\tau^{0,m}$ jest cyklicznym sterowaniem, $h_1 \in R_+$ jest skupionym opóźnieniem stanu, $h_2 \in R_+$ jest skupionym opóźnieniem sterowania, $X \subset R^n$ i $U \subset R^m$ są wypukłymi zbiorami domkniętymi, $B \in R^{q\times m}$ jest macierzą ograniczeń uśrednionych sterowania, wektor $u_s \in R^q$ charakteryzuje średnią dostępność surowców i energii, zaś
$$g : R^n \times R^m \to R, \;\; f : R^n \times R^n \times R^m \times R^m \to R^n.$$

Przestrzeń $H_\tau^{r,n}$ jest przestrzenią τ-okresowych n-wymiarowych funkcji, których r-krotna pochodna jest całkowalna z kwadratem. Warunek okresowości trajektorii stanu jest zawarty w definicji przestrzeni trajektorii stanu. Warunek okresowości sterowania nie musi być formułowany w postaci jawnej - sterowanie jest ogólnie biorąc funkcją nieciągłą (jako element przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem) i zawsze może być okresowo przedłużone na całą oś rzeczywistą. Ustalenie przebiegów stanu i sterowania redukuje rozważany problem do problemu optymalnego sterowania statycznego (OSS) polegającego na maksymalizacji wskaźnika jakości dla statycznego procesu sterowania

$$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{u})$$

przy ograniczeniach statycznych

$$0 = f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}),$$

$$\bar{x} \in X, \quad \bar{u} \in U,$$

$$B\bar{u} = u_s,$$

gdzie $(\bar{x}, \bar{u}) \in R^n \times R^m$ jest statycznym procesem sterowania. Optymalny statyczny proces sterowania $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}})$ można stosunkowo łatwo wyznaczyć stosując metody optymalizacji skończenie wymiarowej. Również jego implementacja nie sprawia trudności i sprowadza się do projektowania układów stabilizacji stanu procesu. Jednak proces taki może zapewniać stosunkowo niską wartość wskaźnika jakości. Dlatego analizowane są warunki, przy których stosowanie cyklicznego sposobu prowadzenia procesu z opóznieniami stanu i sterowania zwiększa jego wydajność w porównaniu z optymalnym procesem statycznym.

W celu określenia warunków dominacji sterowania cyklicznego dla badanej klasy problemów OSC prawa strona równań stanu oznaczona zostanie jako $f(x, \tilde{x}, u, \tilde{u})$, gdzie $\tilde{x}$ jest opóźnionym stanem, a $\tilde{u}$ jest opóźnionym sterowaniem. Wprowadzone zostaną zwarte oznaczenia dla wielkości określonych na optymalnym statycznym procesie sterowania $\overset{o}{\bar{g}} = g(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}})$, $\overset{o}{\bar{g}}_x = g_x(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}})$, $\overset{o}{\bar{f}} = f(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}, \overset{o}{\bar{u}})$, $\overset{o}{\bar{f}}_x = f_x(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}, \overset{o}{\bar{u}})$,
$\overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} = f_{\tilde{x}}(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}, \overset{o}{\bar{u}})$ itp.. Założenia, przy których uzyskane zostaną warunki dominacji, są postaci:

- 1) optymalny statyczny proces sterowania leży wewnątrz obszaru dopuszczalnego tj. $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}) \in Int(X \times U)$,

• 2) funkcje g i f są dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły względem argumentów $x, \tilde{x}, u, \tilde{u}$ w otoczeniu optymalnego procesu statycznego,

• 3) wartości własne macierzy $\overset{o}{\bar{f}}_x + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} e^{-j\omega h_1}$ mają niezerowe części rzeczywiste.

Założenie 1) pozwala nałożyć słabą harmoniczną wariację sterowania (tj. wariację sterowania o małej amplitudzie) na optymalny statyczny proces sterowania bez wyprowadzania procesu dynamicznego z opóźnieniami poza obszar dopuszczalny. Założenie 2) umożliwia wykorzystanie drugiej wariacji wskaźnika jakości do analizy własności procesu cyklicznego z opóźnieniami. Jest to istotne ze względu na zerowanie się pierwszej wariacji tego wskaźnika dla procesów cyklicznych z opóźnieniami. Założenie 3) zapewnia istnienie transmitancji widmowej procesu z opóznieniami, co jest niezbędne dla uzyskania warunków dominacji procesów sterowania cyklicznego.

Wspomniane warunki dominacji określone zostaną za pomocą metody słabych harmonicznych wariacji optymalnego sterowania statycznego. Wariacje te oznaczane będą jako $\overset{o}{\bar{u}} + \Delta u$, gdzie $\Delta u(t) = \epsilon \delta u(t)$,
ϵ jest małym dodatnim parametrem, $\delta u(t) = \sum_{k=\pm 1} u_k^{\wedge} e^{jk\omega t}$ jest pierwszą harmoniczną szeregu Fouriera sterowania w postaci zespolonej ze współczynnikami zespolonymi sprzężonymi $u_\kappa^{\wedge} \in \mathcal{C}^m$, a $\omega = 2\pi/\tau$ jest częstotliwością sterowania. Okresowa trajektoria stanu związana ze sterowaniem $\overset{o}{\bar{u}} + \Delta u$ może być przedstawiona na podstawie metody małego parametru w następującej postaci

$$\overset{o}{\bar{x}} + \Delta x, \quad \Delta x(t) = \epsilon \delta x(t) + o(\epsilon),$$

gdzie $\delta x(t) = \sum_{k=\pm 1} x_k^{\wedge} e^{jk\omega t}$ jest częścią liniową względem ϵ zaburzonej trajektorii stanu, zaś $o(\epsilon)$ jest jej częścią nieliniową względem ϵ spełniającą warunek

$$\lim_{\epsilon \to 0} o(\epsilon)/\epsilon = 0.$$

Część liniowa zaburzonej trajektorii stanu wyznaczana jest przez rozwiązanie zlinearyzowanego równania stanu na optymalnym procesie statycznym tj. przez rozwiązanie równania

$$\delta \dot{x}(t) = \overset{o}{\bar{f}}_x \delta x(t) + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} \delta x(t - h_1) + \overset{o}{\bar{f}}_u \delta u(t) + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{u}} \delta u(t - h_2).$$

Po podstawieniu pierwszych harmonicznych sterowania i stanu

$$\delta u(t) = \sum_{k=\pm 1} u_k^{\wedge} e^{jk\omega t}, \quad \delta x(t) = \sum_{k=\pm 1} x_k^{\wedge} e^{jk\omega t}$$

uzyskuje się

$$\sum_{k=\pm 1} jk\omega x_k^\wedge e^{jk\omega t} = \overset{o}{\bar{f}}_x \sum_{k=\pm 1} x_k^\wedge e^{jk\omega t} + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} \sum_{k=\pm 1} x_k^\wedge e^{jk\omega(t-h_1)} +$$

$$\overset{o}{\bar{f}}_u \sum_{k=\pm 1} u_k^\wedge e^{jk\omega t} + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{u}} \sum_{k=\pm 1} u_k^\wedge e^{jk\omega(t-h_2)}.$$

Z porównania współczynników Fouriera prawej i lewej strony ostatniego równania wynika, że

$$(jk\omega I_n - \overset{o}{\bar{f}}_x - \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} e^{-jk\omega h_1}) x_k^\wedge = (\overset{o}{\bar{f}}_u + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{u}} e^{-jk\omega h_2}) u_k^\wedge, \ \ k = \pm 1.$$

Zdefiniowanie transmitancji widmowej procesu z opóźnieniami stanu i sterowania w postaci

$$G_{h_1 h_2}(jk\omega) = (jk\omega I_n - \overset{o}{\bar{f}}_x - \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} e^{-jk\omega h_1})^{-1} (\overset{o}{\bar{f}}_u + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{u}} e^{-jk\omega h_2})$$

umożliwia wyrażenie zespolonych współczynników Fouriera pierwszej harmonicznej trajektorii stanu za pomocą zespolonych współczynników Fouriera pierwszej harmonicznej sterowania

$$x_k^\wedge = G_{h_1 h_2}(jk\omega) u_k^\wedge, \ \ k = \pm 1,$$

przy czym oodpowiednia macierz odwrotna istnieje na podstawie założenia 3). Część liniowa zaburzonej trajektorii stanu wyraża się więc wzorem

$$\delta x(t) = \sum_{k=\pm 1} G_{h_1 h_2}(jk\omega) u_k^\wedge e^{jk\omega t},$$

a jej wariant opóźniony jest postaci

$$\delta x(t-h_1) = \sum_{k=\pm 1} \tilde{G}_{h_1 h_2}(jk\omega) u_k^\wedge e^{jk\omega t},$$

gdzie

$$\tilde{G}_{h_1 h_2}(jk\omega) = G_{h_1 h_2}(jk\omega) u_k^\wedge e^{-jk\omega h_1}.$$

Warunek dostateczny dominacji sterowania okresowego procesu ze skupionymi opóźnieniami stanu i sterowania uzyskany zostanie za pomocą metody funkcjonałów Lagrange'a. Funkcjonał odpowiedni dla klasy rozważanych procesów przybiera postać

$$L(\tau, x, u, \bar{\lambda}) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(x(t), u(t)) dt +$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \bar{\lambda}^T(f(x(t),x(t-h_1),u(t),u(t-h_2))-\dot{x}(t))dt,$$

gdzie zakładana jest statyczna postać mnożnika Lagrange'a $\bar{\lambda} \in R^n$ z uwagi na analizowanie własności procesu sterowania zaburzonego w otoczeniu optymalnego procesu statycznego. Uwzględnienie w funkcjonale L jedynie ograniczeń w postaci równań stanu jest motywowane tym, że pozostałe ograniczenia problemu OSC są automatycznie spełnione przy założeniach 1) i 2). Ograniczenia chwilowe są zachowane dla dostatecznie małej wartości parametru ϵ, a ograniczenia uśrednione wyzerowują się dla harmonicznych wariacji sterowania.

Jeśli określić funkcję Hamiltona problemu OSC jako funkcję

$$H(x(t),x(t-h_1),u(t),u(t-h_2),\bar{\lambda}) = g(x(t),u(t))+$$

$$\bar{\lambda}^T f(x(t),x(t-h_1),u(t),u(t-h_2)),$$

to funkcjonał L można zapisać w postaci wartości średniej funkcji Hamiltona procesu z opóźnieniami stanu i sterowania

$$L(\tau,x,u,\lambda) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau H(x(t),x(t-h_1),u(t),u(t-h_2))dt.$$

Biorąc pod uwagę tożsamość Lagrange'a $Q(\tau,x,u) = L(\tau,x,u,\lambda)$, zachodzącą dla wszystkich dopuszczalnych procesów sterowania z opóźnieniami stanu i sterowania, moňa porównać funkcję celu dla procesu zaburzonego i optymalnego procesu statycznego korzystają z równości

$$Q(\tau,\bar{\overset{o}{x}}+\Delta x,\bar{\overset{o}{u}}+\Delta u)-\bar{Q}(\bar{\overset{o}{x}},\bar{\overset{o}{u}}) = L(\tau,\bar{\overset{o}{x}}+\Delta x,\bar{\overset{o}{u}}+\Delta u,\bar{\lambda})-\bar{L}(\bar{\overset{o}{x}},\bar{\overset{o}{u}},\bar{\lambda}).$$

Z uwagi na konieczność eliminacji nieznanej wielkości $o(\epsilon)$ w rozwinięciu funkcjonału L w szereg Taylora pierwszego rzędu stosowane jest rozwinięcie tego funkcjonału w szereg Taylora drugiego rzędu względem stanu, stanu opóźnionego, sterowania i sterowania opóźnionego

$$L(\tau,\bar{\overset{o}{x}}+\Delta x,\bar{\overset{o}{u}},\bar{\lambda})-\bar{L}(\bar{\overset{o}{x}},\bar{\overset{o}{u}},\bar{\lambda})$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\bar{\overset{o}{H}}_x\Delta x(t)+\bar{\overset{o}{H}}_{\tilde{x}}\Delta x(t-h_1)+\bar{\overset{o}{H}}_u\Delta u(t)+(\bar{\overset{o}{H}}_{\tilde{u}}\Delta u(t-h_2))dt$$

$$\frac{1}{2\tau}\int_0^\tau \Big(\Delta x^T(t)\bar{\overset{o}{H}}_{xx}\Delta x(t)+\Delta x^T(t)\bar{\overset{o}{H}}_{x\tilde{x}}\Delta x(t-h_1)+$$

$$\Delta x^T(t)\bar{\overset{o}{H}}_{xu}\Delta u(t)+\Delta x^T(t)\bar{\overset{o}{H}}_{x\tilde{u}}\Delta u(t-h_2)+$$

$$\Delta x^T(t-h_1)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}x}\Delta x(t) + \Delta x^T(t-h_1)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}x}\Delta x(t-h_1)+$$

$$\Delta x^T(t-h_1)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}u}\Delta x(t) + \Delta x^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}\tilde{u}}\Delta x(t-h_2)+$$

$$\Delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{xx}\Delta x(t) + \Delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{x}}\Delta x(t-h_1)+$$

$$\Delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{uu}\Delta u(t) + \Delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{u\tilde{u}}\Delta u(t-h_2)+$$

$$\Delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}x}\Delta x(t) + \Delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}\tilde{x}}\Delta x(t-h_1)+$$

$$\Delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}u}\Delta u(t) + \Delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}\tilde{u}}\Delta u(t-h_2)\Big)dt$$

$$+o(||(\Delta x, \Delta u)||^2).$$

Własności wartości średniej procesów okresowych (nie zależy ona od momentu początkowego jej obliczania) zapewniają równość

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\overset{o}{\bar{H}}_x\Delta x(t) + \overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}}\Delta x(t-h_1))dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\overset{o}{\bar{H}}_x\Delta x(t) + \overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}}\Delta x(t))dt.$$

Zerowanie się pierwszej wariacji funkcjonału L zachodzi więc przy wyborze mnożnika Lagrange'a z warunku

$$\overset{o}{\bar{H}}_x + \overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}} = 0$$

tj.

$$\overset{o}{\bar{\lambda}} = -((\overset{o}{\bar{f}}_x + \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}})^{-1})^T \overset{o}{\bar{g}}{}_x^T.$$

Zredukowanie pierwszej wariacji funkcjonału L i podstawienie $\Delta x(t) = \epsilon\delta x(t) + o(\epsilon)$ prowadzi do rozwinięcia funkcjonału L postaci

$$L(\tau, \overset{o}{\bar{x}} + \Delta x, \overset{o}{\bar{u}} + \Delta u, \bar{\lambda}) - \bar{L}(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}, \bar{\lambda}) =$$

$$\frac{\epsilon^2}{2\tau}\int_0^\tau \Big(\delta x^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{xx}\delta x(t) + \Delta x^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{x}}\delta x(t-h_1)+$$

$$\delta x^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{xu}\delta u(t) + \delta x^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{u}}\delta u(t-h_2)+$$

$$\delta x^T(t-h_1)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}x}\delta x(t) + \delta x^T(t-h_1)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}x}\delta x(t-h_1)+$$

$$\delta x^T(t-h_1)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}u}\delta x(t) + \delta x^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}\tilde{u}}\delta x(t-h_2)+$$

$$\delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{xx}\delta x(t) + \delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{x}}\delta x(t-h_1)+$$

$$\delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{uu}\delta u(t) + \delta u^T(t)\overset{o}{\bar{H}}_{u\tilde{u}}\delta u(t-h_2)+$$

$$\delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}x}\delta x(t) + \delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}\tilde{x}}\delta x(t-h_1)+$$

$$\delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}u}\delta u(t) + \delta u^T(t-h_2)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}\tilde{u}}\delta u(t-h_2)\Big)dt$$

$$+o(\epsilon^2).$$

Redukcja wyrażeń typu

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{B}e^{2jk\omega t}dt = 0, \quad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{B}e^{-2jk\omega t}dt = 0$$

dla macierzy $\mathcal{B}$ niezależnej od czasu pozwala uzyskać następujące wyrażenie dla przyrostu funkcji celu procesu okresowego

$$Q(\tau, \overset{o}{\bar{x}} + \Delta x, \overset{o}{\bar{u}} + \Delta u) - \bar{Q}(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}) = \epsilon^2 \xi^\star \Pi_{h_1h_2}(\omega)\xi + o(\epsilon^2)$$

gdzie zależna od częstotliwości macierz $\Pi_{h_1h_2}(\omega)$ ma postać

$$\Pi_{h_1h_2}(\omega) =$$

$$G^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{xx}G_{h_1h_2}(j\omega) + G^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{x}}\tilde{G}_{h_1h_2}(j\omega)+$$

$$G^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{xu} + G^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{xu}G_{h_2}(j\omega)+$$

$$\tilde{G}^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}x}G_{h_1h_2}(j\omega) + \tilde{G}^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{G}_{h_1h_2}(j\omega)+$$

$$\tilde{G}^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}u} + \tilde{G}^\star_{h_1h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}\tilde{u}}G_{h_2}(j\omega)+$$

$$\overset{o}{\bar{H}}_{ux}G_{h_1h_2}(j\omega) + \overset{o}{\bar{H}}_{u\tilde{x}}\tilde{G}_{h_1h_2}(j\omega)+$$

$$\overset{o}{\bar{H}}_{uu} + \overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{u}x}G_{h_2}(j\omega)+$$

$$\tilde{G}^\star_{h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}x}G_{h_1h_2}(j\omega) + \tilde{G}^\star_{h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{G}_{h_1h_2}(j\omega)+$$

$$\tilde{G}^\star_{h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}u} + \tilde{G}^\star_{h_2}(j\omega)\overset{o}{\bar{H}}_{\tilde{x}\tilde{u}}G_{h_2}(j\omega),$$

zaś $G_{h_2}(j\omega) = e^{-jk\omega h_2}$, a $\xi \in \mathcal{C}^m$ jest m-wymiarowym wektorem zespolonym określonym przez współczynnik $u_1^\wedge$ pierwszej harmonicznej sterowania.

Z przedstawionej analizy własności procesu sterowania cyklicznego z opóźnieniami stanu i sterowania wynika następujący

Algorytm drugiej wariacji wskaźnika jakości dla badania dominacji procesów sterowania cyklicznego ze skupionymi opóźnieniami stanu i sterowania

1) obliczyć optymalny statyczny proces sterowania $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}})$,

2) wyznaczyć pomocnicze pochodne rzędu pierwszego $\overset{o}{\bar{g}}_x, \overset{o}{\bar{g}}_x, \overset{o}{\bar{f}}_x, \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}}$, $\overset{o}{\bar{f}}_u, \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{u}}$, i mnożnik Lagrange'a $\overset{o}{\bar{\lambda}}$,

3) określić transmitancje widmowe $G_{h_1h_2}(j\omega), \tilde{G}_{h_1h_2}(j\omega), G_{h_2}(j\omega)$, $\tilde{G}_{h_2}(j\omega)$,

4) wyznaczyć pomocnicze hesjany cząstkowe funkcji Hamiltona

$$\overset{o}{\bar{H}}_{xx}, \overset{o}{\bar{H}}_{xx}, \overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{x}}, \overset{o}{\bar{H}}_{xu}, \overset{o}{\bar{H}}_{x\tilde{u}}, ..., \overset{o}{\bar{H}}_{uu},$$

5) zestawić formę macierzową $\xi^{\star}\Pi_{h_1h_2}(\omega)\xi$ i dla wybranego wektora ξ zbadać jej przebieg w funkcji częstotliwości wydzielając pasmo częstotliwości o dodatnich wartościach formy pi dla procesu z opóznieniami

6) określić dominujące sterowanie okresowe na podstawie wzoru

$$u(t) = \overset{o}{\bar{u}} + 2\epsilon(Re(\xi)cos\hat{\omega}t - Im(\xi)sin\hat{\omega}t),$$

gdzie częstotliwość $\hat{\omega}$ wyznaczana jest na podstawie przebiegu krzywej dominacji,

7) zbadać wpływ opóźnień h_1 i h_2 na postać sterowania dominującego określając krzywe dominacji dla różnych wartości h_1 i h_2.

Przykład: Rozważmy proces sterowania cyklicznego stężeniem substancji surowcowej A wprowadzanej do zbiornikowego reaktora chemicznego o działaniu ciągłym, gdzie zachodzi jej przemiana w produkt użyteczny B. Obiekt sterowania objęty jest recyklem wprowadzającym opźnienie stanu. Oznaczmy

- $u(t)$ - stężenie substancji A w strumieniu wejściowym reaktora w chwili t,
- $x(t)$ - stężenie substancji A w reaktorze w chwili t,
- $q = 1$ - jednostkowe natężenie przepływu mieszaniny reagującej przez reaktor,
- $h \in [0, \tau]$ - opóźnienie wprowadzane przez recykl,
- $\gamma = 0.5$ - współczynnik recyklu.

Problem optymalnego sterowania cyklicznego dla rozważanego przykładu polega na maksymalizacji wydajności procesu (tj. na minimalizacji średniej ilości nieprzereagowanego produktu)

$$Q(x,u) = -\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)dt$$

z uwzględnieniem równania stanu

$$\dot{x}(t) = 0.5u(t) - x(t) + 0.5x(t-h) - x^2(t), \ \ t \in [0,\tau],$$

chwilowych ograniczeń stanu i sterowania

$$x(t) \geq 0, \ \ 0 \leq u(t) \leq 2, \ \ t \in [0,\tau],$$

oraz średniej wydajności źródła surowca

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt = 1.$$

Problem optymalnego sterowania statycznego dla rozważanego przykładu polega na maksymalizacji wydajności procesu na poziomie statycznym (tj. na minimalizacji średniej ilości nieprzereagowanego produktu na poziomie statycznym)

$$\bar{Q}(\bar{x},\bar{u}) = -\bar{x}$$

z uwzględnieniem statycznego równania stanu

$$0 = 0.5\bar{u} - \bar{x} + 0.5\bar{x} - \bar{x}^2,$$

ograniczeń zakresu zmiennych

$$\bar{x} \geq 0, \ \ 0 \leq \bar{u} \leq 2,$$

oraz statycznego poziomu eksploatacji źródła surowca

$$\bar{u} = 1.$$

W ramach algorytmu badania dominacji sterowania cyklicznego wyznaczamy

• optymalny proces statyczny $(\overset{o}{\bar{x}}, \overset{o}{\bar{u}}) = (0.5, 1)$,

• pomocnicze pochodne pierwszego rzędu $\overset{o}{\bar{g}}_x = -1, \ \overset{o}{\bar{f}}_x = -3, \ \overset{o}{\bar{f}}_{\tilde{x}} = 0.5, \ \overset{o}{\bar{f}}_u = 0.5$,

• mnożnik Lagrange'a $\overset{o}{\bar{\lambda}} = -2/5$,

• pomocnicze pochodne drugiego rzędu czyli hesjany cząstkowe funkcji Hamiltona

$$H(x(t), u(t), \overset{o}{\bar{\lambda}}) = -x(t) + \overset{o}{\bar{\lambda}}(0.5u(t) - x(t) + 0.5x(t-h) - x^2(t)),$$

które przyjmą postać $\overset{o}{\bar{H}}_{xx} = 4/5$,

• transmitancję widmową i jej sprzężenie

$$G_h(j\omega) = \frac{0.5}{j\omega + 3 - 0.5e^{-j\omega h}}, \quad G_h^*(j\omega) = \frac{0.5}{-j\omega + 3 - 0.5e^{-j\omega h}},$$

• formę macierzową pi

$$\xi^*\Pi(\omega)\xi = |\xi|^2 \frac{4/5}{(3 - 0.5\cos\ \omega h)^2 + (\omega + 0.5\sin\ \omega h)^2}.$$

Ponieważ forma ta jest dodatnia, to dla każdej częstotliwości istnieje dominujące sterowanie cykliczne. Jednak najlepszych efektów można spodziewać się dla sterowania niskoczęstotliwościowego zharmonizowanego z opóźnieniem procesu.