Metody kierunków poprawy dla nieliniowych problemów sterowania optymalnego

Problem optymalnego sterowania procesem dynamicznym może polegać na polega na minimalizacji wskaźnika jakości obejmującego koszty realizacji procesu i wartość produktu użytecznego

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt + h(x(t_1))$$

z uwzględnieniem

- równania stanu procesu z zadanym stanem początkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \;\; t \in [t_0,t_1], \;\; x(t_0) = x_0$$

- oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [t_0,t_1],$$

gdzie $x \in W_2^1([t_0,t_1];R^n)$ jest trajektorią stanu procesu będącą elementem przestrzeni funkcji o pochodnej całkowalnej z kwadratem, $u \in L_2([t_0,t_1];R^m)$ jest jego sterowaniem będącym elementem przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem,

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \;\; h : R^n \to R, \;\; f : R^n \times R^m \times R \to R^n,$$

są, ogólnie biorąc, funkcjami nieliniowymi.

Na podstawie standardowych twierdzeń o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego z zadanym warunkiem początkowym można uważać równanie stanu rozważanej klasy procesów za rozwikływalne względem stanu w funkcji sterowania. Określone jest więc odwzorowanie $x(t,u)$ jednoznacznie wyznaczające stan procesu w chwili t w funkcju sterowania u. Pozwala to zredukować rozważany problem do przestrzeni sterowania: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t,u),u(t),t)dt + h(x(t_1,u))$$

z uwzględnieniem ograniczeń chwilowych

$$u(t) \in [u^-, u^+].$$

Gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania celowo jest obliczać z wykorzystaniem równania sprzężonego. Dla określenia tego równania definiowany jest funkcjonał Lagrange'a w postaci normalnej

$$L(\eta, x, u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt + h(x(t_1))$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))dt + \eta^T(t_0)(x(t_0) - x_0),$$

gdzie $\eta(t) \in W_2^1([t_0, t_1]; R^n)$ jest zmienną sprzężoną związaną z analizowanym problemem. Zastosowanie wzoru na całkowanie przez części daje w wyniku

$$L(\eta, x, u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt + h(x(t_1)) + \eta^T(t_1)x(t_1) - \eta^T(t_0)x(t_0)$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^T(t)x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)f(x(t), u(t), t)dt + \eta^T(t_0)(x(t_0) - x_0).$$

Uproszczenie wyrażeń identycznych i wprowadzenie funkcji Hamiltona postaci

$$H(\eta(t), x(t), u(t), t) \doteq -g(x(t), u(t), t) + \eta^T(t)f(x(t), u(t), t)$$

umożliwia zapisanie funkcjonału Lagrange'a w postaci

$$L(\eta, x, u) = h(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\eta}^T(t)x(t) + H(\eta(t), x(t), u(t), t))dt$$

$$+\eta^T(t_1)x(t_1) - \eta^T(t_0)x_0.$$

Ponieważ dla każdego dopuszczalnego procesu sterowania obowiązuje tożsamość Lagrange'a

$$J(u) = L(\eta, x, u),$$

więc dla wariacji zredukowanego wskaźnika jakości zachodzi zależność

$$J_u(u)\delta u = L_\eta(\eta, x, u)\delta\eta + L_x(\eta, x, u)\delta x + L_u(\eta, x, u)\delta u,$$

gdzie $\delta\eta$, δx, δu są wariacjami odpowiednio zmiennej sprzężonej, trajektorii stanu i sterowania. Wariacja funkcjonału Lagrange'a względem zmiennej sprzężonej $L_\eta \delta\eta$ wyzerowuje się na każdym procesie dopuszczalnym, gdyż ma ona postać iloczynu skalarnego wariacji zmiennej sprzężonej i równania stanu

$$L_\eta \delta\eta = \int_{t_0}^{t_1} \delta\eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))dt \Rightarrow L_\eta \delta\eta = 0.$$

Wariacja funkcjonału Lagrange'a względem trajektorii stanu wyzerowuje się, jeśli zmienna sprzężona zostanie dobrana tak, aby było spełnione tzw. równanie sprzężone.

$$L_x(\eta, x, u)\delta x = -\int_{t_0}^{t_1} (\dot{\eta}^T(t)\delta x(t) + H_x(\eta(t), x(t), u(t), t))\delta x(t)dt.$$

$$+h_x(x(t_1))\delta x_(t_1) + \eta^T(t_1)\delta x(t_1).$$

Zdefiniowanie równania sprzężonego w postaci równania różniczkowego z zadanym stanem końcowym

$$\dot{\eta}(t) = -H_x^T(\eta(t), x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \eta(t_1) = -h_x^T(x(t_1))$$

wyzerowuje wariację funkcjonału Lagrange'a względem trajektorii stanu

$$L_x(\eta, x, u)\delta x.$$

Tak więc wariacja zredukowanego wskaźnika jakości względem sterowania jest równa wariacji funkcjonału Lagrange'a względem sterowania

$$J_u(u)\delta u = L_u(u)\delta u.$$

Ponieważ

$$L_u\delta u = -\int_{t_0}^{t_1} H_u(\eta(t), x(t), u(t), t)\delta u(t)dt$$

więc gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania wyraża się wzorem

$$J_u(u)\delta u = \int_{t_0}^{t_1} J_u(u)(t)\delta u(t)dt, \quad J_u(u)(t) = -H_u(\eta(t), x(t), u(t), t) \quad t \in [t_0, t_1].$$

Korzystając z definicji funkcji Hamiltona można równanie sprzężone przepisać w postaci

$$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t), u(t), t)\eta(t) + g_x^T(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \eta(t_1) = -h_x^T(x(t_1)),$$

co oznacza, że równanie sprzężone jest liniowym (niestacjonarnym) równaniem różniczkowym z zadanym stanem końcowym. Wyznaczanie gradientu wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania za pomocą równania sprzężonego sprowadza się do rozwiązania jednego pomocniczego liniowego równania różniczkowego. Natomiast bezpośrednie obliczanie gradientu zredukowanego do przestrzeni sterowania wymaga posługiwania się macierzą fundamentalną równania stanu $X(t)$

$$J_u(u) = \int_{t_0}^{t_1} (g_x(x(t), u(t), t)\delta x(t) + g_u(x(t), u(t), t)\delta u(t))dt + h_x(x(t_1))\delta x(t_1).$$

gdzie wariacja trajektorii stanu $\delta x(t)$ spełnia zlinearyzowane równanie stanu

$$\delta \dot{x}(t) = f_x(x(t), u(t), t)\delta x(t) + f_u(x(t), u(t), t)\delta u(t), \quad \delta x(t) = 0,$$

którego rozwiązanie ma postać

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tilde{t}) f_u(x(\tilde{t}), u(\tilde{t}), \tilde{t})\delta u(\tilde{t}) d\tilde{t},$$

przy czym macierz fundamentalna $X(t)$ spełnia macierzowe równanie różniczkowe

$$\dot{X}(t) = f_x(x(t), u(t), t)X(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad X(t_0) = I_n.$$

Celem wyznaczenia gradientu zredukowanego metodą bezpośrednią należy więc rozwiązać układ n^2 równań różniczkowych, a metodą pośrednią - tylko układ n równań różniczkowych. Różnica w czasie obliczeń może być istotna, jeśli obliczanie gradientu zredukowanego dokonywane jest wielokrotnie np. w algorytmach iteracyjnych z tysiącami iteracji.

Podstawowy algorytm kierunków poprawy dla problemów sterowania optymalnego bazuje na

Gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania i *stanu początkowego* też moiżna oblicza z wykorzystaniem równania sprzężonego. Dla określenia tego równania definiowany jest funkcjonał Lagrange'a w postaci normalnej

$$L(\eta, x, u, x_0) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt + h(x(t_1))$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))dt + \eta^T(t_0)(x(t_0) - x_0),$$

gdzie $\eta(t) \in W_2^1([t_0, t_1]; R^n)$ jest zmienną sprzężoną związaną z analizowanym problemem. Zastosowanie wzoru na całkowanie przez części daje w wyniku

$$L(\eta, x, u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt + h(x(t_1)) + \eta^T(t_1)x(t_1) - \eta^T(t_0)x(t_0)$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^T(t)x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \eta^T(t)f(x(t), u(t), t)dt + \eta^T(t_0)(x(t_0) - x_0).$$

Uproszczenie wyrażeń identycznych i wprowadzenie funkcji Hamiltona postaci

$$H(\eta(t), x(t), u(t), t) \doteq -g(x(t), u(t), t) + \eta^T(t)f(x(t), u(t), t)$$

umożliwia zapisanie funkcjonału Lagrange'a w postaci

$$L(\eta, x, u) = h(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\eta}^T(t)x(t) + H(\eta(t), x(t), u(t), t))dt$$

$$+\eta^T(t_1)x(t_1) - \eta^T(t_0)x_0.$$

Ponieważ dla każdego dopuszczalnego procesu sterowania obowiązuje tożsamość Lagrange'a

$$J(u, x_0) = L(\eta, x, u, x_0),$$

więc dla wariacji zredukowanego wskaźnika jakości zachodzi zależność

$$J_u(u, x_0)\delta u = L_\eta(\eta, x, u, x_0)\delta\eta + L_x(\eta, x, u, x_0)\delta x$$

$$+L_u(\eta, x, u, x_0)\delta u + L_{x_0}(\eta, x, u, x_0),$$

gdzie $\delta\eta$, δx, δu oraz δx_0 są wariacjami odpowiednio zmiennej sprzężonej, trajektorii stanu, sterowania i stanu początkowego. Stosując analogiczne rozumowanie jak poprzednio wnioskujemy, że wariacja funkcjonału Lagrange'a względem zmiennej sprzężonej $L_\eta\delta\eta$ wyzerowuje się na każdym procesie dopuszczalnym, gdyż ma ona postać iloczynu skalarnego wariacji zmiennej sprzężonej i równania stanu

$$L_\eta\delta\eta = \int_{t_0}^{t_1} \delta\eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))dt \Rightarrow L_\eta\delta\eta = 0.$$

Wariacja funkcjonału Lagrange'a względem trajektorii stanu wyzerowuje się, jeśli zmienna sprzężona zostanie dobrana tak, aby było spełnione równanie sprzężone.

$$L_x(\eta, x, u, x_0)\delta x = -\int_{t_0}^{t_1} (\dot{\eta}^T(t)\delta x(t) + H_x(\eta(t), x(t), u(t), t))\delta x(t)dt.$$

$$+h_x(x(t_1))\delta x_(t_1) + \eta^T(t_1)\delta x(t_1).$$

Zdefiniowanie równania sprzężonego w postaci równania różniczkowego z zadanym stanem końcowym

$$\dot{\eta}(t) = -H_x^T(\eta(t), x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \eta(t_1) = -h_x^T(x(t_1))$$

wyzerowuje wariację funkcjonału Lagrange'a względem trajektorii stanu

$$L_x(\eta, x, u, x_0)\delta x.$$

Tak więc wariacja zredukowanego wskaźnika jakości względem sterowania i stanu początkowego jest równa wariacji funkcjonału Lagrange'a względem sterowania

$$J_u(u, x_0)\delta u = L_{\eta,x,u,x_0}(u)\delta u + L_{x_0}(\eta, x, u, x_0).$$

Ponieważ

$$L_u \delta u = -\int_{t_0}^{t_1} H_u(\eta(t), x(t), u(t), t)\delta u(t)dt$$

więc gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania i stanu początkowego wyraża się wzorami

$$J_u(u, x_0)\delta u = \int_{t_0}^{t_1} J_u(u, x_0)(t)\delta u(t)dt,$$

$$J_u(u, x_0)(t) = -H_u(\eta(t), x(t), u(t), t) \;\; t \in [t_0, t_1]$$

jeśli chodzi o sterowanie oraz

$$J_{x_0}(u, x_0) = -\eta(t_0)$$

jeśli chodzi o stan początkowy.

Podstawowy algorytm kierunków poprawy dla problemów minimalizacji wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania i stanu początkowego bazuje na poszukiwaniu rozwiązania polepszającego ten wskaźnik w kierunku antygradientu

$$u^+(t) = u(t) - \gamma^+ J_u(u, x_0)(t), \;\; t \in [t_0, t_1], \;\; x_0^+ = x_0 - \gamma^+ J_{x_0}(u, x_0),$$

gdzie $\gamma^+ > 0$ jest długością kroku wyznaczaną w wyniku optymalizacji kierunkowej.

Gradient wskaźnika jakości procesów okresowych zredukowanego do przestrzeni sterowań okresowych

$$u \in L_2^\tau(R^m)$$

można również obliczać z wykorzystaniem okresowego równania sprzężonego. Dla określenia tego równania definiowany jest funkcjonał Lagrange'a w postaci normalnej

$$L(\eta, x, u) \doteq \int_0^\tau g(x(t), u(t), t)dt$$

$$+ \int_0^\tau \eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))dt + \eta^T(t_0)(x(\tau) - x(0)),$$

gdzie $\eta(t) \in W_2^{1\tau}([0, \tau], R^n)$ jest zmienną sprzężoną związaną z analizowanym problemem. Zastosowanie wzoru na całkowanie przez części daje w wyniku

$$L(\eta, x, u) \doteq \int_0^\tau g(x(t), u(t), t)dt + \eta^T(\tau)x(\tau) - \eta^T(0)x(0)$$

$$- \int_0^\tau \dot{\eta}^T(t)x(t)dt - \int_0^\tau \eta^T(t)f(x(t), u(t), t)dt + \eta^T(0)(x(\tau) - x(0)).$$

Uproszczenie wyrażeń identycznych i wprowadzenie funkcji Hamiltona postaci

$$H(\eta(t), x(t), u(t), t) \doteq -g(x(t), u(t), t) + \eta^T(t) f(x(t), u(t), t)$$

umożliwia zapisanie funkcjonału Lagrange'a w postaci

$$L(\eta, x, u) = -\int_0^\tau (\dot{\eta}^T(t)x(t) + H(\eta(t), x(t), u(t), t))dt$$
$$+\eta^T(\tau)x(\tau) - \eta^T(0)x(0).$$

Ponieważ dla każdego dopuszczalnego procesu sterowania obowiązuje tożsamość Lagrange'a

$$J(u) = L(\eta, x, u),$$

więc dla wariacji wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowań okresowych zachodzi zależność

$$J_u(u)\delta u = L_\eta(\eta, x, u)\delta\eta + L_x(\eta, x, u)\delta x + L_u(\eta, x, u)\delta u,$$

gdzie $\delta\eta$, δx, δu są wariacjami odpowiednio zmiennej sprzężonej, trajektorii stanu i sterowania. Wariacja funkcjonału Lagrange'a względem zmiennej sprzężonej $L_\eta\delta\eta$ wyzerowuje się na każdym procesie dopuszczalnym, gdyż ma ona postać iloczynu skalarnego wariacji zmiennej sprzężonej i równania stanu

$$L_\eta\delta\eta = \int_0^\tau \delta\eta^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))dt \Rightarrow L_\eta\delta\eta + \delta\eta^T(\tau)x(\tau) - \delta\eta^T(0)x(0) = 0.$$

Wariacja funkcjonału Lagrange'a względem trajektorii stanu wyzerowuje się, jeśli zmienna sprzężona zostanie dobrana tak, aby było spełnione tzw. równanie sprzężone z warunkiem okresowości zmiennych sprzężonych.

$$L_x(\eta, x, u)\delta x = -\int_0^\tau (\dot{\eta}^T(t)\delta x(t) + H_x(\eta(t), x(t), u(t), t))\delta x(t)dt$$
$$+(\eta^T(\tau) - \eta^T(0))\delta x(0).$$

Zdefiniowanie równania sprzężonego w postaci równania różniczkowego z warunkiem okresowości zmiennych sprzężonych

$$\dot{\eta}(t) = -H_x^T(\eta(t), x(t), u(t), t), \quad t \in [0, \tau], \quad \eta(\tau) = \eta(0)$$

wyzerowuje wariację funkcjonału Lagrange'a względem trajektorii stanu

$$L_x(\eta, x, u)\delta x.$$

Tak więc wariacja zredukowanego wskaźnika jakości względem sterowania okresowego jest równa wariacji funkcjonału Lagrange'a względem tego sterowania

$$J_u(u)\delta u = L_u(u)\delta u.$$

Ponieważ

$$L_u\delta u = -\int_0^\tau H_u(\eta(t), x(t), u(t), t)\delta u(t)dt$$

więc gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania okresowego wyraża się wzorem

$$J_u(u)\delta u = \int_0^\tau J_u(u)(t)\delta u(t)dt, \quad J_u(u)(t) = -H_u(\eta(t), x(t), u(t), t) \;\; t \in [0, \tau].$$

Korzystając z definicji funkcji Hamiltona można równanie sprzężone przepisać w postaci

$$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t), u(t), t)\eta(t) + g_x^T(x(t), u(t), t), \;\; t \in [t_0, t_1], \;\; \eta(\tau) = \eta(0),$$

co oznacza, że równanie sprzężone jest liniowym (niestacjonarnym) równaniem różniczkowym z warunkiem okresowości. Wyznaczanie gradientu wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania okresowego za pomocą równania sprzężonego sprowadza się do rozwiązania jednego pomocniczego liniowego równania różniczkowego z warunkiem okresowości zmiennych sprzężonych.

Praktyczna realizacja wielu algorytmów sterowania optymalnego związana jest z dyskretyzacją sterowania. Zastosowanie znajduje tu przede wszystkim baza funkcji schodkowych ($t_0 = 0$, $t_1 = 1$) $u(t, \mathsf{u}) = \sum_{k=0}^{K-1} e_k(t)\mathsf{u}_k$, gdzie $\mathsf{u}_k \in R^m$ and

$$e_k(t) = \begin{cases} 1 & if \quad t \in [k/K, (k+1)/K), \\ 0 & if \quad t \notin [k/K, (k+1)/K). \end{cases}$$

Gradient wskaźnika jakości zredukowanego do przestrzeni funkcji schodkowych uzyskuje się po podstawieniu do wyrażenia

$$J_u(u)\delta u = -\int_0^1 H_u(x(t), u(t), t)\delta u(t)dt,$$

schodkowej dyskretyzacji sterowania $\delta u(t, \mathsf{u}) = \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} e_k(t)\delta \mathsf{u}_k$

$$J_{\mathsf{u}}(u) = (J_{\mathsf{u}_k}(u))_{k=0}^{K-1},$$

gdzie

$$J_{\mathsf{u}_k}(u) = -\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} H_u(x(t), u(t), t)dt, \;\; \delta \doteq 1/K, \;\; k = 0, 1, ..., K-1.$$

Metody optymalizacji różnicowej procesów sterowania

W wielu problemach sterowania dokładne obliczanie gradientu $J'(u)$ wskaznika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania jest utrudnione z uwagi na złożoność modelu procesu (duża liczba zmiennych stanu, nieliniowy charakter procesu, niestandardowe warunki brzegowe stanu - okresowe, pseudo-okresowe, mieszane). Zastosowanie równań sprzężonych daje dobre wyniki dla zadań z zadanym stanem początkowym i stosunkowo niewielką liczbą równań stanu. W innych przypadkach celowe może być wykorzystanie gradientu różnicowego, który obliczany jest wyłącznie na podstawie znajomości wartości wskaznika jakości

$$J'(u) \approx \big((J(u+de_1)-J(u))/d, (J(u+de_2)-J(u))/d, ..., (J(u+de_{\bar{k}})-J(u))/d\big),$$

gdzie

$$e_k \doteq (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$$

jest k-tym wersorem układu współrzędnych dyskretnego sterowania, a d jest długością kroku ilorazu różnicowego.

Lemat: Niech funkcja $J : R^{\bar{k}} \to R$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły w obszarze otwartym i wypukłym D zawierającym punkt u i niech gradient $J'(u)$ funkcji $J(u)$ spełnia w obszarze D warunek Lipschitza

$$|J'(u+\delta u) - J'(u)| \leq L|\delta u|, \quad u, u+\delta u \in D.$$

Dla funkcji posiadających gradient ciągły w sensie Lipschitza prawostronna aproksymacja różnicowa składowych gradientu jest zbieżna liniowo do ich dokładnych wartości względem długości kroku ilorazu różnicowego.

$$|\frac{J(u+de_k) - J(u)}{d} - J'(u)e_k| \leq \frac{L}{2}|d|.$$

Dowód. Założenie lematu gwarantuje spełnienie przez funkcję $J(u)$ nierówności

$$|J(u+\delta u) - J(u) - J'(u)\delta u| \leq 0.5L|\delta u|^2.$$

Oszacowanie to wynika z rozwinięcia funkcji $J(u)$ w szereg Taylora pierwszego rzędu

$$J(u+\delta u) = J(u) + J'(u)\delta u + \int_0^1 J'(u+\theta\delta u)\delta u d\theta$$

czyli

$$J(u+\delta u) - J(u) - J'(u)\delta u = \int_0^1 (J'(u+\theta\delta u) - J(u))\delta u d\theta.$$

Warunek Lipschitza dla gradientu $J'(u)$ implikuje zależności

$$|J(u+\delta u) - J(u) - J'(u)\delta u| \le \int_0^1 |J'(u+\theta\delta u) - J(u)||\delta u| d\theta$$

$$\le \int_0^1 L|\theta\delta u||\delta u| d\theta = L|\delta u|^2 \int_0^1 \theta d\theta = \frac{L}{2}|\delta u|^2.$$

Podstawienie $\delta u = de_k$

$$|J(u+de_k) - J(u) - J'(u)de_k| \le \frac{L}{2}|de_k|^2 = \frac{L}{2}|d|^2.$$

Dzieląc powyższą nierówność przez d uzyskujemy

$$|\frac{J(u+de_k) - J(u)}{d} - J'(u)e_k| \le \frac{L}{2}|d|.$$

Jeśli więc funkcja posiada gradient ciągły w sensie Lipschitza, to prawostronna aproksymacja różnicowa składowych gradientu jest zbieżna do ich dokładnych wartości liniowo względem długości kroku ilorazu różnicowego.

Zaletą metody gradientu różnicowego jest jej uniwersalność (można ją zastosować do każdej funkcji L-ciągłej jeśli tylko dostępne są jej wartości) i prostota realizacji metody (stosuje się w tym przypadku elementarne operacje obliczeniowe). Jej wadą jest duża wrażliwość na błędy pojawiające się przy małej precyzji obliczeń. Zmniejszenie tej wrażliwości osiągnąć można stosując dokładniejsze metody aproksymacji różnicowej np. dwustronny centralny iloraz różnicowy:

$$J'(u) \approx \big((J(u+de_1) - J(u-de_1)))/2d, (J(u+de_2) - J(u-de_2)))/2d,$$

$$..., (J(u+de_{\bar{k}}) - J(u-de_{\bar{k}})))/2d\big),$$

gdzie obliczane są wartości wskaznika jakości dla argumentów przesuniętych na prawo i na lewo od punktu aktualnego.

Niech $H(u) \doteq J''_{u_k u_l}(u)$ oznacza hesjan funkcji $J(u)$ tj. macierz jej drugich pochodnych cząstkowych.

Lemat: Niech funkcja $J : R^{\bar{k}} \to R$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły w obszarze otwartym i wypukłym D zawierającym punkt u i niech hesjan $H(u)$ funkcji $J(u)$ spełnia w obszarze D warunek Lipschitza

$$|H(u+\delta u) - H(u)| \le L|\delta u|, \quad u, u+\delta u \in D.$$

Dla funkcji posiadających hesjan ciągły w sensie Lipschitza dwustronna centralna aproksymacja różnicowa składowych gradientu jest zbieżna kwadratowo do ich dokładnych wartości względem długości kroku ilorazu różnicowego.

$$|\frac{J(u+de_k)-J(u-de_k)}{2d}-J'(u)e_k|\leq\frac{L}{6}|d|^2.$$

Dowód wykorzystuje oszacowanie dokładności rozwinięcia funkcji $J(u$ w szereg Taylora drugiego rzędu z uwzględnieniem spełnienia warunku Lipschitza przez hesjan tej funkcji

$$|J(u+\delta u)-J(u)-J'(u)\delta u+0.5\delta u^T H(u)\delta u|\leq\frac{L}{6}|\delta u|^3 \quad (*).$$

Określa się następnie prawostronne i lewostronne rozwinięcie funkcji J wzdłuż wersora u_k:

$$\alpha \doteq J(u+de_k)-J(u)-dJ'_{u_k}(u)-d^2J''_{u_k u_k}(u),$$
$$\beta \doteq J(u-de_k)-J(u)+dJ'_{u_k}(u)-d^2J''_{u_k u_k}(u),$$

Zastosowanie oszacowania (*) do wielkości α i β w kierunku $\pm de_k$ daje w wyniku nierówności

$$|\alpha|\leq\frac{L}{6}d^3,\ \ |\beta|\leq\frac{L}{6}d^3.$$

Stąd $|\alpha-\beta|\leq|\alpha|+|\beta|\leq\frac{L}{3}d^3$. Poszukiwane oszacowanie wynika z równości

$$\frac{1}{2d}(\alpha-\beta)=\frac{J(u+de_k)-J(u-de_k)}{d}-J'(u)e_k.$$

Obliczanie hesjanu wskaznika jakości zredukowanego do przestrzeni sterowania wymaga znacznego nakładu obliczeń. Dlatego użyteczna jest aproksymacja drugich pochodnych cząstkowych za pomocą ilorazów różnicowych drugiego rzędu

$$J_{u_k u_l}(u)\approx\big(J(u+de_k+de_l)-J(u+de_k)-J(u+de_l)+J(u)\big)/d^2.$$

Dla funkcji z hesjanem ciągłym w sensie Lipschitza aproksymacja powyższa jest zbieżna liniowo do dokładnej wartości drugiej pochodnej, co wynika z oszacowania

$$|J_{u_k u_l}(u)-\big(J(u+de_k+de_l)-J(u+de_k)-J(u+de_l)+J(u)\big)/d^2|\leq\frac{5}{3}Ld$$

uzyskiwanego na podstawie dokładności rozwinięcia funkcji J w szereg Taylora drugiego rzędu.

Jedną z klas problemów optymalnego sterowania, dla której obliczanie gradientu zredukowanego wskanika jakości jest utrudnione, jest klasa problemów optymalnego sterowania cyklicznego. Równania sprzężone są w tym przypadku z reguły niestabilne i ich całkowanie wymaga zastosowania szczególnie dokładnych metod. Dlatego celowo jest w tym przypadku wykorzystać metodę gradientu różnicowego.

Metoda przesuwanej funkcji kary i zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a dla problemów sterowania optymalnego z równościowymi ograniczeniami nieliniowymi

Problem optymalnego sterowania procesem dynamicznym z równościowymi ograniczeniami nieliniowymi może polegać na minimalizacji całkowego wskaźnika jakości

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt$$

z uwzględnieniem

- równania stanu procesu z zadanym stanem początkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad t \in [t_0,t_1], \quad x(t_0) = x_0$$

- ograniczeń równościowych niektórych lub wszystkich współrzędnych stanu końcowego

$$h(x(t_1)) = 0$$

  oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-,u^+], \quad t \in [t_0,t_1],$$

gdzie $x \in W^1_\infty([t_0,t_1];R^n)$ jest trajektorią stanu procesu, $u \in L_\infty([t_0,t_1];R^m)$ jest jego sterowaniem, a

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \quad f : R^n \times R^m \times R \to R^n, \quad h : R^n \to R^p,$$

są, ogólnie biorąc, funkcjami nieliniowymi.

Standardowe twierdzenia o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego z zadanym warunkiem początkowym pozwalają uważać równanie stanu rozważanej klasy procesów za rozwikływalne względem stanu w funkcji sterowania. Określone jest więc odwzorowanie $x(t,u)$ jednoznacznie wyznaczające stan procesu w chwili t w funkcju sterowania u.

Na tej podstawie można zredukować rozważany problem do przestrzeni sterowania: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t,u),u(t),t)dt$$

z uwzględnieniem

- równościowych ograniczeń nieliniowych stanu końcowego

$$h(x(t_1,u)) = 0$$

  oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [t_0, t_1].$$

Te ostatnie ograniczenia mogą nie być włączone w sposób jawny do sformułowania niektórych problemów jeśli minimalizacja wskaźnika jakości automatycznie ogranicza amplitudę sterowania.

Przykład: Niech $x_1(t)$ oznacza położenie nieliniowego obiektu oscylacyjnego w chwili t, $x_2(t)$ - jego prędkość w chwili t, zaś $u(t)$ - siłę stabilizującą obiektu. Minimalnoenergetyczne sprowadzanie nieliniowego obiektu oscylacyjnego do stanu równowagi polega na minimalizacji wskaźnika jakości w postaci strat energetycznych na sterowanie

$$G(x,u) = \int_0^1 u^2(t)dt$$

z uwzględnieniem

- równań stanu nieliniowego oscylatora

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \;\; \dot{x}_2(t) = -a_1x_1(t) + a_{11}x_1^3(t) - a_2x_2(t) + u(t), \;\; t \in [0,1],$$

  z zaburzonym stanem początkowym

$$x_1(0) = x_{10}, \;\; x_2(0) = x_{20},$$

  oraz

- nieliniowych ograniczeń stanu końcowego

$$x_1(1) = 0, \;\; x_2(1) = 0.$$

Po redukcji do przestrzeni sterowania problem przybiera postać: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) = \int_0^1 u^2(t)dt$$

przy równościowym ograniczeniu nieliniowym

$$x_1(1,u) = 0, \;\; x_2(1,u) = 0.$$

Minimalnoczasowe sprowadzanie nieliniowego obiektu oscylacyjnego do stanu równowagi polega na minimalizacji wskaźnika jakości w postaci czasu realizacji procesu

$$G(x,u) = \int_0^{t_1} dt$$

z uwzględnieniem

- równań stanu nieliniowego oscylatora

  $$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \;\; \dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) + a_{11} x_1^3(t) - a_2 x_2(t) + u(t), \;\; t \in [0,1],$$

  z zaburzonym stanem początkowym

  $$x_1(0) = x_{10}, \;\; x_2(0) = x_{20},$$

- nieliniowych ograniczeń stanu końcowego

  $$x_1(t_1) = 0, \;\; x_2(t_1) = 0,$$

  oraz

- ograniczenia chwilowego sterowania

  $$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [0, t_1].$$

Po redukcji do przestrzeni sterowania problem przybiera postać: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) = \int_0^{t_1} dt$$

przy równościowym ograniczeniu nieliniowym

$$x_1(t_1, u) = 0, \ \ x_2(t_1, u) = 0.$$

i nierównościowym ograniczeniu chwilowym sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \ \ t \in [0, t_1].$$

Powyższe przykłady ilustrują problemy sterowania docelowego - obiekt należy przeprowadzić z zadanego stanu początkowego (tj. stanu zaburzonego) do zadanego stanu końcowego (tj. stanu równowagi). Z zadaniami tego rodzaju mamy do czynienia przy rozruchu procesów np. należy przeprowadzić obiekt z naturalnego stanu początkowego (wsad pewnej ilości surowca w chwili początkowej, brak produktu użytecznego w chwili początkowej) do docelowego stanu technologicznego (np. stabilnego statycznego punktu równowagi procesu umożliwiającego statyczny sposób jego prowadzenia).

Przykład: Proces produkcyjny prowadzony w zbiornikowym reaktorze chemicznym polega na przemianie surowca A w produkt użyteczny B z wykorzystaniem sterowania temperaturowego. Niech $x_1(t)$ oznacza stężenie A w obiekcie w chwili t, $x_2(t)$ - stężenie B w obiekcie w chwili t, a $x_3(t)$ - temperaturę obiektu w chwili t. Należy zminimalizować koszty sterowania temperaturowego

$$G(x, u) = \int_0^1 u(t)dt$$

z uwzględnieniem

- równań stanu procesu z naturalnymi początkowymi wartościami współrzędnych stanu

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 e^{-b/u(t)} x_1^2(t), \ \ t \in [0, 1], \ \ x_1(0) = x_{10} > 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1 e^{-b/u(t)} x_2^2(t), \ \ t \in [0, 1], \ \ x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = a_2 u(t) - a_3 x_3^2(t), \ \ t \in [0, 1], \ \ x_3(0) = x_{30} > 0,$$

- ograniczeń stanu docelowego

$$x_1(1) = x_{11}, \ \ x_2(1) = x_{21}, \ \ x_3(1) = x_{31}$$

  oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \quad t \in [0, 1].$$

Po redukcji do przestrzeni sterowania problem przybiera postać: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) = \int_0^1 u(t)dt$$

przy równościowym ograniczeniu nieliniowym

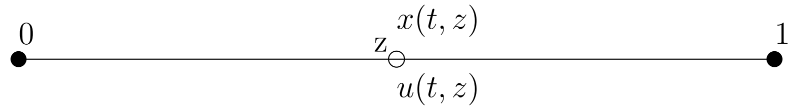
$$x_1(1, u) = x_{11}, \quad x_2(1, u) = x_{21}, \quad x_3(1, u) = x_{31}$$

i nierównościowych ograniczeniach chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \quad t \in [0, 1].$$

Problemy sterowania optymalnego z nieliniowymi ograniczeniami równościowymi są charakterystyczne dla niektórych procesów o parametrach rozłożonych.

Przykład. Sterowanie nagrzewem pręta metalowego z izolowanymi końcami.



Rozłożonym stanem procesu $x(t, z)$ jest temperatura pręta w chwili t i w punkcie z. Rozłożonym sterowaniem procesu $u(t, z)$ jest intensywność źródła ciepła w chwili t i w punkcie z.

Problem sterowania optymalnego może polegać na minimalizacji strat energetycznych na nagrzewanie

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 u^2(t, z)dtdz$$

z uwzględnieniem równania stanu jako równania przewodnictwa cieplnego ze sterowaniem temperaturowym

$$x_t(t, z) = \tilde{\alpha}(x(t, z), u(t, z))x_{zz}(t, z) - \tilde{a}x(t, z) + \tilde{b}u(t, z), \quad (t, z) \in [t_0, t_1] \times [0, 1]$$

i z warunkami brzegowymi

$$x(t,0)=0, \quad x(t,1)=0, \quad t \in [t_0,t_1]$$

(co oznacza, że na izolowanych końcach pręta utrzymywana jest umowna temperatura zerowa) oraz z warunkiem początkowym tj. z zadanym rozkładem początkowym temperatury w pręcie

$$x(t_0,z)=x_0(z), \quad z \in [0,1],$$

przy czym określony jest docelowy rozkład temperatury w pręcie

$$x(t_1,z)=x_1(z), \quad z \in [0,1].$$

W równaniu stanu wzięto pod uwagę zależność współczynnika przewodnictwa cieplnego α od stanu i sterowania (np. z uwagi na niejednorodność materiału). Równanie to jest więc nieliniowe i określa nieliniową zależność stanu od sterowania $x(t,z,u)$.

Po redukcji do przestrzeni sterowania zadanie przybiera postać: zminimalizować wskaźnik jakości

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 u^2(t,z)dtdz$$

przy nieliniowym funkcyjnym ograniczeniu równościowym

$$x(t_1,z,u)=x_1(z), \quad z \in [0,1].$$

Dyskretyzacja schodkowa sterowania $u(t,u_k) = \sum_{k=0}^{K-1} e_k(t)u_k$ sprowadza rozpatrywane problemy do zadań optymalizacji skończenie-wymiarowej typu

$$\min_{u\in R^{\bar{m}}}\{J(u_k): \quad \varphi(u)=0, \quad u_k \in [u^-,u^+], \quad k=0,1,2,...,K-1, \quad \bar{m} \doteq mK\},$$

gdzie składowe odwzorowania $\varphi : R^{\bar{m}} \to R^p$ są funkcjami nieliniowymi i niewypukłymi. Jeśli wskaźnik jakości ogranicza amplitudę sterowania, to zadanie powyższe upraszcza się do postaci

$$\min_{u\in R^{\bar{m}}}\{J(u): \quad \varphi(u)=0\}.$$

Do zadania tego można zastosować metodę kwadratowej funkcji kary, która prowadzi do zadania optymalizacji bez ograniczeń

$$\Phi(u,\rho) \doteq \min_{u\in R^{\bar{m}}}\{J(u)+\frac{\rho}{2}|\varphi(u)|^2\},$$

gdzie $\rho > 0$ jest współczynnikiem funkcji kary. Analiza tej metody pokazuje jednak, że sterowania optymalne dla problemu z funkcją kary są zbieżne do rozwiązania problemu wyjściowego tylko wtedy, gdy współczynnik kary ρ jest zwiększany do nieskończoności. Przy dużych współczynnikach kary problem staje się źle uwarunkowany i metoda kwadratowej funkcji kary jest mało skuteczna. Dlatego zaproponowano ulepszone warianty tej metody. Jednym z nich jest metoda przesuwanej kwadratowej funkcji kary

$$\Psi(\mathbf{u}, \rho, \nu) \doteq \min_{\mathbf{u} \in R^{mK}} \{J(\mathbf{u}) + \frac{\rho}{2} |\varphi(\mathbf{u}) + \nu|^2\},$$

gdzie składowe przesunięcia funkcji kary $\nu \in R^p$ są zwiększane w tą stronę, w którą naruszone zostało ograniczenie na danym sterowaniu. Zwiększa to wartość funkcji kary baz zmiany współczynnika ρ i wymusza zbliżenie sterowania do obszaru dopuszczalnego.

Niech nieliniowe ograniczenie równościowe ma postać związaną ze stanem końcowym procesu tj.

$$\varphi(\mathbf{u}) = x(t_1, \mathbf{u}) - x_1.$$

Algorytm przesuwanej funkcji kary

- Etap wstępny. Wybierz wymiar bazy schodkowej sterowania K i dyskretne sterowanie początkowe $\mathbf{u} \doteq \{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{K-1}$, początkowe dopuszczalne naruszenie ograniczenia d, współczynnik zmniejszania naruszenia ograniczenia $\alpha \in (0, 1)$, początkowy współczynnik kary ρ i współczynnik jego zwiększania $\beta > 1$, początkowe przesunięcie kary $\nu = 0$ i dokładność obliczeń ϵ.

- Etap pierwszy. Wyznacz rozwiązanie równania stanu ze sterowaniem dyskretnym

  $$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t, \mathbf{u}), t), \quad t \in [0, 1],$$

  $$x(0) = x_0$$

  oraz równanie sprzężone ze sterowaniem dyskretnym

  $$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t), u(t, \mathbf{u}), t)\eta(t) + g_x^T(x(t), u(t, \mathbf{u}), t), \quad t \in [0, 1],$$

  $$\eta(1) = -\rho(x(1) - x_1 + \nu).$$

- Etap drugi. Oblicz gradient zredukowanego wskaźnika jakości

$$J_{u_k}(u) = -\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} H_u(\eta(t), x(t), u(t,u), t)dt, \quad \delta = 1/K, \quad k = 0, 1, ..., K-1,$$

  i podstaw startową długość kroku $\gamma = 1$.

- Etap trzeci. Wyznacz rozwiązanie problemu optymalizacji bez ograniczeń $u = arg\min_{u \in R^{\bar{m}}} \Psi(u, \rho, \nu)$ z dokładnością ϵ stosując metodę typu gradientowego

$$u := u - \gamma \Psi_u(u)$$

  i oblicz naruszenie ograniczenia $c = |x(1) - x_1|$.

  Jeśli $c \leq d$, to podstaw $\nu := \nu + x(1) - x_1, \quad d := \alpha d$.

  Jeśli $c > d$, to podstaw $\nu := \frac{1}{\beta}(\nu + x(1) - x_1), \quad \rho := \beta\rho$.

- Etap czwarty. Jeśli $|u^+ - u| < \epsilon$, to stop. W przeciwnym razie wróć do Etapu pierwszego.

Przesuwanie funkcji kary celowo jest powiązać z mnożnikami Lagrange'a charakteryzującymi rozwiązanie optymalne. Wskaźnik jakości z przesuwaną kwadratową funkcją kary można przekształcić jak następuje

$$J(u) + \frac{\rho}{2}|\varphi(u) + \nu|^2 = J(u) + \frac{\rho}{2}(\langle \varphi(u) + \nu, \varphi(u) + \nu \rangle)$$
$$= \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + 2\langle \varphi(u), \nu \rangle + \langle \nu, \nu \rangle.$$

Po podstawieniu $\nu = \lambda/\rho$ uzyskuje się równoważną funkcję celu zwaną zmodyfikowaną funkcją Lagrange'a

$$M(u, \lambda, \rho) \doteq J(u) + \lambda^T \varphi(u) + \frac{\rho}{2}|\varphi(u)|^2,$$

gdzie $\lambda \in R^p$ jest mnożnikiem Lagrange'a. Algorytm optymalizacji z wykorzystaniem zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a przybierze postać

$$u = arg \min_{u \in R^{\bar{m}}} M(u, \rho, \nu), \quad \lambda := \lambda + \rho\varphi(u).$$

Zbieżność i szybkość zbieżności algorytmu zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a

W analizie własności algorytmu korzysta się z następującego lematu o minimum lokalnym funkcji zaburzonej.

Lemat. Jeśli u^* jest lokalnym minimum funkcji $f(u^*)$ spełniającym warunki optymalności drugiego rzędu $f'(u^*) = 0$, $f''(u^*) > 0$, a $g(u^*)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu u^*, to funkcja zaburzona $f(u^*) + \varepsilon g(u^*)$ posiada dla dostatecznie małego ϵ lokalne minimum u^ε określone zależnością

$$u^\varepsilon = u^* - \varepsilon(f''(u^*))^{-1} g'(u^*) + o(\varepsilon).$$

Niech λ^* oznacza optymalny mnożnik Lagrange'a dla zadania optymalizacji z równościowym ograniczeniem nieliniowym, niech λ^κ i u^κ oznaczają mnożnik Lagrange'a i sterowanie na κ-tej iteracji algorytmu i niech

$$f(u) \doteq M(u, \lambda^*, \rho), \quad g(u) \doteq \langle \lambda^\kappa - \lambda^*, \varphi(u) \rangle.$$

Wtedy

$$f(u) + g(u) = M(u, \lambda^*, \rho) + \langle \lambda^\kappa - \lambda^*, \varphi(u) \rangle$$

$$= J(u) + \langle \lambda^*, \varphi(u) \rangle + 0.5\rho|\varphi(u)|^2 + \langle \lambda^\kappa, \varphi(u) \rangle - \langle \lambda^*, \varphi(u) \rangle = M(u, \lambda^\kappa, \rho).$$

Jeśli λ^κ jest dobrym przybliżeniem λ^*, to $|\lambda^\kappa - \lambda^*|$ jest wielkością małą (tj. $|\lambda^\kappa - \lambda^*| \sim \varepsilon$) i można uważać, że $u^{\kappa+1}$ jest minimum lokalnym funkcji $f(u) + g(u)$ w otoczeniu u^*, przy czym

$$u^{\kappa+1} - u^* = -(f''(u^*))^{-1} \varphi'^T(u^*)(\lambda^\kappa - \lambda^*) + o(\lambda^\kappa - \lambda^*). \quad (\bullet)$$

Wprowadzenie oznaczeń

$$C \doteq \varphi'(u^*), \quad L(u, \lambda) \doteq J(u) + \langle \lambda, \varphi(u) \rangle, \quad A \doteq L''_{uu}(u^*, \lambda^*),$$

pozwala zapisać następujące wyrażenia dla pochodnych funkcji f i g:

$$f''(u^*) = L''_{uu}(u^*, \lambda^*) + \rho(\varphi(u)\varphi'(u))'|_{u=u^*} = A + \rho C^T C, \quad \varphi(u^*) = 0,$$

$$g'(u^*) = C^T(\lambda^\kappa - \lambda^*).$$

Ze wzoru $(\bullet)$ uzyskuje się oszacowanie

$$|u^{\kappa+1} - u^*| \le |(A + \rho C^T C)^{-1} C^T| \, |\lambda^\kappa - \lambda^*| + o(|\lambda^\kappa - \lambda^*|)$$

$$\le \frac{c}{\rho} |\lambda^\kappa - \lambda^*| + o(\lambda^\kappa - \lambda^*)|,$$

przy czym stosuje się tu wynikające z teorii macierzowych form kwadratowych oszacowanie

$$|(A + \rho C^T C)^{-1}| \leq \bar{c}/\rho.$$

Ponieważ

$$\lambda^{\kappa+1} = \lambda^{\kappa} + \rho(\varphi(u^{\kappa+1}) - \varphi(u^{\kappa})) = \lambda^{\kappa} + \rho C(u^{\kappa+1} - u^*) + o(u^{\kappa+1} - u^*)$$

$$= \lambda^{\kappa} - \rho C(A + \rho C^T C)^{-1} C^T (\lambda^{\kappa} - \lambda^*) + o(\lambda^{\kappa} - \lambda^*),$$

więc

$$|\lambda^{\kappa+1} - \lambda^*| \leq |I - \rho C(A + \rho C^T C)^{-1} C^T| \, |\lambda^{\kappa+1} - \lambda^*| + o(\lambda^{\kappa+1} - \lambda^*|).$$

Stosując wynikające z teorii macierzowych form kwadratowych oszacowanie

$$|I - \rho C(A + \rho C^T C)^{-1}| \leq \bar{\bar{c}}/\rho$$

ostatecznie uzyskuje się

$$|u^{\kappa} - u^*| \leq (\frac{c_1}{\rho})^{\kappa}, \ \ |\lambda^{\kappa} - \lambda^*| \leq (\frac{c_2}{\rho})^{\kappa}, \ \ \kappa = 0, 1, 2, \dots \, .$$

Oznacza to, że metoda zmodyfikowanych funkcji Lagrange'a (a co za tym idzie i metoda przesuwanej funkcji kary) jest zbieżna liniowo dla rozważanych problemów sterowania optymalnego.

Metoda przesuwanej funkcji kary i zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a dla problemów sterowania optymalnego z nierównościowymi ograniczeniami nieliniowymi

Problem optymalnego sterowania procesem dynamicznym z równościowymi ograniczeniami nieliniowymi może polegać na minimalizacji całkowego wskaźnika jakości

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt$$

z uwzględnieniem

- równania stanu procesu z zadanym stanem początkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \;\; t \in [t_0,t_1], \;\; x(t_0) = x_0$$

- ograniczeń nierównościowych niektórych lub wszystkich współrzędnych stanu końcowego

$$h(x(t_1)) \leq 0$$

oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-,u^+], \;\; t \in [t_0,t_1],$$

gdzie $x \in W^1_\infty([t_0,t_1];R^n)$ jest trajektorią stanu procesu, $u \in L_\infty([t_0,t_1];R^m)$ jest jego sterowaniem, a

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \;\; f : R^n \times R^m \times R \to R^n, \;\; h : R^n \to R^p,$$

są, ogólnie biorąc, funkcjami nieliniowymi.

Standardowe twierdzenia o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego z zadanym warunkiem początkowym pozwalają uważać równanie stanu rozważanej klasy procesów za rozwikływalne względem stanu w funkcji sterowania. Określone jest więc odwzorowanie $x(t,u)$ jednoznacznie wyznaczające stan procesu w chwili t w funkcju sterowania u.

Na tej podstawie można zredukować rozważany problem do przestrzeni sterowania: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t,u),u(t),t)dt$$

z uwzględnieniem

- nierównościowych ograniczeń nieliniowych stanu końcowego

$$h(x(t_1, u)) \leq 0$$

  oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [t_0, t_1].$$

Te ostatnie ograniczenia mogą nie być włączone w sposób jawny do sformułowania niektórych problemów jeśli minimalizacja wskaźnika jakości automatycznie ogranicza amplitudę sterowania.

Przykład: Niech $x_1(t)$ oznacza położenie nieliniowego obiektu oscylacyjnego w chwili t, $x_2(t)$ - jego prędkość w chwili t, zaś $u(t)$ - siłę stabilizująą obiektu. Minimalnoenergetyczne sprowadzanie nieliniowego obiektu oscylacyjnego do stanu równowagi polega na minimalizacji wskaźnika jakości w postaci strat energetycznych na sterowanie

$$G(x, u) = \int_0^1 u^2(t)dt$$

z uwzględnieniem

- równań stanu nieliniowego oscylatora

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \;\; \dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) + a_{11} x_1^3(t) - a_2 x_2(t) + u(t), \;\; t \in [0, 1],$$

  z zaburzonym stanem początkowym

$$x_1(0) = x_{10}, \;\; x_2(0) = x_{20},$$

  oraz

- nieliniowych ograniczeń stanu końcowego

$$x_1^2(1) \leq \epsilon, \;\; x_2^2(1) \leq \epsilon, \;\; \epsilon > 0.$$

W tym przypadku obiekt należy sprowadzić do pewnego otoczenia punktu równowagi.

Po redukcji do przestrzeni sterowania problem przybiera postać: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) = \int_0^1 u^2(t)dt$$

przy równościowym ograniczeniu nieliniowym

$$x_1^2(1,u) \leq \epsilon, \;\; x_2^2(1,u) \leq \epsilon.$$

Minimalnoczasowe sprowadzanie nieliniowego obiektu oscylacyjnego do stanu równowagi polega na minimalizacji wskaźnika jakości w postaci czasu realizacji procesu

$$G(x,u) = \int_0^{t_1} dt$$

z uwzględnieniem

- równań stanu nieliniowego oscylatora

  $$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \;\; \dot{x}_2(t) = -a_1 x_1(t) + a_{11} x_1^3(t) - a_2 x_2(t) + u(t), \;\; t \in [0,1],$$

  z zaburzonym stanem początkowym

  $$x_1(0) = x_{10}, \;\; x_2(0) = x_{20},$$

- nieliniowych ograniczeń nierównościowych stanu końcowego

  $$x_1^2(t_1) \leq \epsilon, \;\; x_2^2(t_1) \leq \epsilon,$$

  oraz

- ograniczenia chwilowego sterowania

  $$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [0, t_1].$$

Po redukcji do przestrzeni sterowania problem przybiera postać: zminimalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) = \int_0^{t_1} dt$$

przy nierównościowych ograniczeniach nieliniowych stanu końcowego

$$x_1^2(t_1,u) \leq \epsilon, \;\; x_2^2(t_1,u) \leq \epsilon.$$

i nierównościowym ograniczeniu chwilowym sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [0, t_1].$$

Powyższe przykłady ilustrują problemy sterowania do obszaru docelowego - obiekt należy przeprowadzić z zadanego stanu początkowego do zadanego obszaru końcowego. Z zadaniami tego rodzaju mamy do czynienia np. przy ograniczeniach na zawartość produktu ubocznego w produkcie końcowym.

Przykład: Proces produkcyjny prowadzony w zbiornikowym reaktorze chemicznym polega na przemianie surowca A w produkt użyteczny B z uwzględnieniem produktu ubocznego C. Niech $x_1(t)$ oznacza stężenie A w obiekcie w chwili t, $x_2(t)$ - stężenie B w obiekcie w chwili t, a $x_3(t)$ - stężenie C w chwili t. Należy zmaksymalizować ilość produktu użytecznego w chwili końcowej procesu

$$G(x, u) = x_2(1)$$

przy ograniczeniach w postaci

- równań stanu procesu z zadanymi początkowymi wartościami współrzędnych stanu

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 e^{-b/u(t)} x_1^2(t), \;\; t \in [0, 1], \;\; x_1(0) = x_{10} > 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1 e^{-b/u(t)} x_2^2(t), \;\; t \in [0, 1], \;\; x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = a_2 u(t) - a_3 x_3^2(t), \;\; t \in [0, 1], \;\; x_3(0) = x_{30} > 0,$$

- nierównościowego ograniczeńia stanu końcowego

$$x_3(1) \leq x_{31}$$

  oraz

- ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \;\; t \in [0, 1].$$

Po redukcji do przestrzeni sterowania problem przybiera postać: zmaksymalizować zredukowany wskaźnik jakości

$$J(u) = x_2(1)$$

przy nierównościowym ograniczeniu nieliniowym

$$x_3(1, u) \leq x_{31}$$

i nierównościowych ograniczeniach chwilowych sterowania

$$u(t) \in [u^-, u^+], \ \ t \in [0, 1].$$

Dyskretyzacja schodkowa sterowania $u(t, u_k) = \sum_{k=0}^{K-1} e_k(t) u_k$ sprowadza rozpatrywane problemy do zadań optymalizacji skończenie-wymiarowej typu

$$\min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u_k): \ \ \varphi(u) \leq 0, \ \ u_k \in [u^-, u^+], \ \ k = 0, 1, 2, ..., K-1, \ \ \bar{m} \doteq mK\},$$

gdzie składowe odwzorowania $\varphi : R^{\bar{m}} \to R^p$ są funkcjami nieliniowymi i niewypukłymi. Jeśli wskaźnik jakości ogranicza amplitudę sterowania, to zadanie powyższe upraszcza się do postaci

$$\min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u): \ \ \varphi(u) \leq 0\}.$$

Do zadania tego można zastosować metodę kwadratowej funkcji kary dla ograniczeń nierównościowych, która prowadzi do zadania optymalizacji bez ograniczeń

$$\Phi(u, \rho) \doteq \min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u) + \frac{\rho}{2} max^2(0, \varphi(u)\},$$

gdzie $\rho > 0$ jest współczynnikiem funkcji kary. Analiza tej metody pokazuje jednak, że sterowania optymalne dla problemu z funkcją kary są zbieżne do rozwiązania problemu wyjściowego tylko wtedy, gdy współczynnik kary ρ jest zwiększany do nieskończoności. Przy dużych współczynnikach kary problem staje się źle uwarunkowany i metoda kwadratowej funkcji kary dla ograniczeń nierównościowych jest mało skuteczna. Dlatego zaproponowano ulepszone warianty tej metody. Jednym z nich jest metoda przesuwanej kwadratowej funkcji kary dla ograniczeń nierównościowych

$$\Psi(u, \rho, \nu) \doteq \min_{u \in R^{\bar{m}}} \{J(u) + \frac{\rho}{2} max^2(0, \varphi(u) + \nu)\},$$

gdzie składowe przesunięcia funkcji kary $\nu \in R^p$ są zwiększane w tą stronę, w którą naruszone zostało ograniczenie na danym sterowaniu. Zwiększa to wartość funkcji kary baz zmiany współczynnika ρ i wymusza zbliżenie sterowania do obszaru dopuszczalnego.

Niech nieliniowe ograniczenie nierównościowe ma postać związaną ze stanem końcowym procesu np. jest ograniczeniem zawartości końcowej x_{n1} produktu ubocznego modelowanego przez ostatnią zmiennca stanu x_n

$$\varphi(\mathsf{u}) \leq 0, \quad \varphi(\mathsf{u}) = x_n(1, \mathsf{u})) - x_{n1}.$$

Algorytm przesuwanej funkcji kary
dla ograniczeń nierównościowych

- Etap wstępny. Wybierz wymiar bazy schodkowej sterowania K i dyskretne sterowanie początkowe $\mathsf{u} \doteq \{\mathsf{u}_k\}_{k=0}^{K-1}$, początkowe dopuszczalne naruszenie ograniczenia d, współczynnik zmniejszania naruszenia ograniczenia $\alpha \in (0,1)$, początkowy współczynnik kary ρ i współczynnik jego zwiększania $\beta > 1$, początkowe przesunięcie kary $\nu = 0$ i dokładność obliczeń ϵ.

- Etap pierwszy. Wyznacz rozwiązanie równania stanu ze sterowaniem dyskretnym
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t, \mathsf{u}), t), \quad t \in [0,1],$$
$$x(0) = x_0$$
oraz równanie sprzężone ze sterowaniem dyskretnym
$$\dot{\eta}(t) = -f_x^T(x(t), u(t, \mathsf{u}), t)\eta(t) + g_x^T(x(t), u(t, \mathsf{u}), t), \quad t \in [0,1],$$
$$\eta(1) = -\rho \max(0, x_n(1) + \nu)(0, ..., 0, 1)^T.$$

- Etap drugi. Oblicz gradient zredukowanego wskaźnika jakości
$$J_{\mathsf{u}_k}(\mathsf{u}) = -\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} H_u(\eta(t), x(t), u(t, \mathsf{u}), t)dt, \quad \delta = 1/K, \quad k = 0, 1, ..., K-1,$$
i podstaw startową długość kroku $\gamma = 1$.

- Etap trzeci. Wyznacz rozwiązanie problemu optymalizacji bez ograniczeń $\mathsf{u} = arg\min_{\mathsf{u} \in R^{\bar{m}}} \Psi(\mathsf{u}, \rho, \nu)$ z dokładnością ϵ stosując metodę typu gradientowego
$$\mathsf{u} := \mathsf{u} - \gamma \Psi_{\mathsf{u}}(\mathsf{u})$$
i oblicz naruszenie ograniczenia $c = max^2(0, x_n(1) - x_{n1})$.

  Jeśli $c \leq d$, to podstaw $\nu := \nu + x_n(1) - x_{n1}, \quad d := \alpha d$.

  Jeśli $c > d$, to podstaw $\nu := \frac{1}{\beta}(\nu + x_n(1) - x_{n1}), \quad \rho := \beta\rho$.

- Etap czwarty. Jeśli $|u^{+} - u| < \epsilon$, to stop. W przeciwnym razie wróć do Etapu pierwszego.