Sterowanie optymalne dla układów nieliniowych. Zasada maksimum Pontriagina.

W podstawowym problemie sterowania optymalnego minimalizacji podlega całkowy wskaźnik jakości

$$G(x,u) \doteq \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt$$

z uwzględnieniem ograniczeń w postaci równania stanu procesu

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad t \in [t_0,t_1]$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(t_0) = x_0$$

oraz ograniczeń w postaci dopuszczalnego chwilowego zakresu wartości sterowania

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0,t_1],$$

gdzie funkcje

$$g : R^n \times R^m \times R \to R, \quad f : R^n \times R^m \times R \to R^n$$

są, ogólnie biorąc, nieliniowe.

Przyjmujemy następujące założenia:

1. Funkcje g i f są różniczkowalne w sposób ciągły względem stanu x i ciągłe względem sterowania u i czasu t,
2. Sterowania dopuszczalne są funkcjami przedziałami ciągłymi o skończonej liczbie nieciągłości pierwszego rodzaju, tj. $u \in PC([t_0,t_1],R^m)$.

Dla pochodnych funkcji g i f względem stanu stosujemy oznaczenia

$$g_x(x,u,t), \; f_x(x,u,t).$$

Definiujemy funkcję Hamiltona (hamiltonian) w postaci

$$H(\lambda(t),x(t),u(t),t) = -g(x(t),u(t),t) + \lambda^T(t)f(x(t),u(t),t).$$

Oznaczając iloczyn skalarny wektorów $x^T y$ jako $\langle x, y \rangle$ możemy zapisać hamiltonian w postaci równoważnej

$$H(\lambda(t), x(t), u(t), t) = -g(x(t), u(t), t) + \big\langle \lambda(t), f(x(t), u(t), t) \big\rangle.$$

Zasada maksimum Pontriagina jako warunek konieczny optymalności procesu sterowania

Twierdzenie: Jeśli (x^o, u^o) jest optymalnym procesem sterowania dla problemu podstawowego, to istnieje zmienna kostanu (zmienna sprzężona) λ^o spełniająca równanie kostanu (równanie sprzężone)

$$\dot{\lambda}^o(t) = -f_x^T(x^o(t), u^o(t), t)\lambda^o(t) + g_x^T(x^o(t), u^o(t), t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

z warunkiem końcowym

$$\lambda^o(t_1) = 0$$

i taka, że sterowanie optymalne u^o maksymalizuje na zbiorze U (w sensie globalnym) hamiltonian problemu dla prawie wszystkich $t \in [t_0, t_1]$ tj.

$$H(\lambda^o(t), x^o(t), u^o(t), t) = \max_{u(t)\in U} H(\lambda^o(t), x^o(t), u(t), t)$$

czyli

$$u^o(t) = arg \max_{u(t)\in U} H(\lambda^o(t), x^o(t), u(t), t).$$

Warunek maksymalizacji hamiltonianu można też zapisać w postaci

$$H(\lambda^o(t), x^o(t), u^o(t), t) \geq H(\lambda^o(t), x^o(t), u(t), t) \;\; \forall u \in U.$$

Dowód: W dowodzie korzystamy z następujących faktów z teorii równań różniczkowych i z analizy matematycznej

1. Jeśli funkcja $\varphi(x(t), t)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły względem x i ciągła względem t w otoczeniu punktu $(\bar{x}, \bar{t})$, to równanie różniczkowe $\dot{x}(t) = \varphi(x(t), t)$ posiada jednoznacznie określone rozwiązanie w otoczeniu punktu t,

2. Jeśli równanie różniczkowe $\dot{x}(t) = \varphi(x(t), t)$ z funkcją φ różniczkowalną w sposób ciągły względem x i przedziałami ciągłą względem t posiada rozwiązanie w przedziale $[\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$ przy warunku początkowym $x(\bar{t})$, to posiada ono również rozwiązanie w tym przedziale przy małym zaburzeniu warunku początkowego $x(\bar{t}) + \delta x(\bar{t})$,

3. Niech $x(t,\theta)$ będzie funkcją ciągłą względem t i różniczkowalną w sposób ciągły względem θ i niech funkcja $\varphi(x(t,\theta),t)$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły względem x i ograniczoną względem t, to uzasadnione jest przejście z różniczkowaniem pod znak całki

$$\frac{d}{d\theta}\int_{t_0}^{\tau}\varphi(x(t,\theta),t)dt = \int_{t_0}^{\tau}\frac{d}{d\theta}\varphi(x(t,\theta),t)dt = \int_{t_0}^{\tau}\varphi_x(x(t,\theta),t)\frac{d}{d\theta}x(t,\theta),$$

4. granica wartości średnich funkcji ciągłej w punkcie τ jest zbieżna do jej wartości w tym punkcie,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{\tau-\theta}^{\tau}\varphi(t)dt = \varphi(\tau).$$

Załóżmy, że punkt $\tau \in [t_0, t_1]$ jest punktem ciągłości sterowania optymalnego $u^o(t)$. Niech $v \in U$. Zdefiniujemy tzw. wariację igłową sterowania optymalnego $u^o(t)$:

$$u^\theta(t) = \begin{cases} u^o(t) & gdy \quad t \neq [\tau-\theta,\tau), \\ v & gdy \quad t \in [\tau-\theta,\tau), \end{cases}$$

przy czym v jest dowolnym elementem zbioru U. Niech $x^\theta(t)$ będzie rozwiązaniem równania stanu z warunkiem początkowym x_0 i ze sterowaniem $u^\theta(t)$. Tak więc $x^\theta(t) = x^o(t)$ dla $t \in [t_0, \tau-\theta]$. Równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = f(x(t),v,t), \quad t \in [\tau-\theta,\tau], \quad x(\tau-\theta) = x^o(\tau-\theta)$$

jest jednoznacznie rozwiązywalne w małym otoczeniu punktu $\tau-\theta$, a więc dla dostatecznie małego θ rozwiązanie $x^\theta(t)$ istnieje w całym przedziale $[\tau-\theta,\tau]$.

Stany $x^\theta(\tau)$ i $x^o(\tau)$ dowolnie mało różnią się od siebie, gdyż sterowania $u^\theta(t)$ i $u^o(t)$ dowolnie mało różnią się od siebie w przedziale $[t_0,\tau]$. Oznacza to, że rozwiązanie równania stanu $x^\theta(t)$ istnieje w przedziale $[\tau, t_1]$ jako małe zaburzenie rozwiązania $x^o(t)$ w tym przedziale.

Ponieważ punkt τ jest punktem ciągłości sterowania optymalnego $u^o(t)$, więc $u^o(t)$ jest funkcją ciągłą w pewnym otoczeniu punktu τ. Dlatego funkcja $\frac{d}{dt}x^o(t)$ jest również ciągła w tym otoczeniu i obowiązuje rozkład w szereg Taylora

$$\begin{aligned} x^o(\tau) &= x^o(\tau-\theta) + \theta\frac{d}{dt}x^o(\tau-\theta) + o(\theta) \\ &= x^o(\tau-\theta) + \theta f(x^o(\tau-\theta), u^o(\tau-\theta), \tau-\theta) + o(\theta), \end{aligned}$$

przy czym

$$\lim_{\theta\to 0} o(\theta)/\theta = 0.$$

Podobnie $\frac{d}{dt}x^\theta(t)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[\tau-\theta,\tau]$, gdyż sterowanie jest w tym przedziale stałe. Oznacza to, że dla funkcji $x^\theta(t)$ również obowiązuje rozkład w szereg Taylora

$$x^\theta(\tau) = x^o(\tau-\theta) + \theta f(x^o(\tau-\theta), v, \tau-\theta) + o(\theta).$$

Istnieje więc granica

$$y(\tau) = \lim_{\theta\to 0} \frac{x^\theta(\tau) - x^o(\tau)}{\theta} = f(x^o(\tau), v, \tau) - f(x^o(\tau), u^\tau, \tau).$$

Ponieważ wielkości $x^\theta(\tau)$ i $x^o(\tau)$ dowolnie mało różnią się od siebie, to rozwiązanie $x^\theta(t)$ istnieje w przedziale $[\tau, t_1]$ jako małe zaburzenie rozwiązania $x^o(t)$ względem warunku początkowego zbieżne do rozwiązania $x^o(t)$ przy $\theta \downarrow 0$. Na podstawie ciągłości i różniczkowalności rozwiązania równania różniczkowego względem warunku początkowego w przedziale $[\tau, t_1]$ istnieje wyrażenie

$$y(t) = \lim_{\theta\to 0} \frac{x^\theta(t) - x^o(t)}{\theta}.$$

Dla $t \in [\tau, t_1]$ możemy zapisać całkowe wersje równań stanu

$$x^\theta(t) = x^\theta(\tau) + \int_\tau^t f(x^\theta(s), u^o(s), s)ds,$$

$$x^o(t) = x^\tau + \int_\tau^t f(x^o(s), u^o(s), s)ds.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{x^\theta(t) - x^o(t)}{\theta} = \frac{x^\theta(\tau) - x^o(\tau)}{\theta} + \int_\tau^t \frac{f(x^\theta(s), u^o(s), s) - f(x^o(s), u^o(s), s)}{\theta} ds.$$

Przechodząc do granicy z $\theta \downarrow 0$ uzyskujemy

$$y(t) = y(\tau) + \lim_{\theta\to 0} \int_\tau^t \frac{f(x^\theta(s), u^o(s), s) - f(x^o(s), u^o(s), s)}{\theta} ds$$

$$= y(\tau) + \frac{d}{d\theta}\int_\tau^t f(x^\theta(s), u^o(s), s)ds|_{\theta=0}$$

$$y(\tau) + \int_\tau^t \frac{d}{d\theta} f(x^\theta(s), u^o(s), s)|_{\theta=0} ds$$

$$y(\tau)+\int_{\tau}^{t} f_x(x^o(s),u^o(s),s)\frac{d}{d\theta}x^{\theta}(s)|_{\theta=0}ds$$

$$y(\tau)+\int_{\tau}^{t} f_x(x^o(s),u^o(s),s)y(s)ds.$$

Tak więc funkcja $y(t)$ spełnia w przedziale $[\tau, t_1]$ równanie różniczkowe

$$\dot{y}(t)=f_x(x^o(t),u^o(t),t)y(t)$$

z warunkiem początkowym

$$y(\tau)=f(x^o(\tau),v,\tau)-f(x^o(\tau),u^o(\tau),\tau).$$

W przedziale $[\tau, t_1]$ są spełnione następujące zależności wynikające z równania sprzężonego

$$\frac{d}{dt}\big\langle\lambda^o(t),y(t)\big\rangle=\big\langle\frac{d}{dt}\lambda^o(t),y(t)\big\rangle+\big\langle\lambda^o(t),\frac{d}{dt}y(t)\big\rangle$$

$$=-\big\langle f_x^T(x^o(t),u^o(t),t)\lambda^o(t),y(t)\big\rangle+\big\langle g_x^T(x^o(t),u^o(t),t),y(t)\big\rangle$$

$$+\big\langle\lambda^o(t),f_x(x^o(t),u^o(t),t)y(t)\big\rangle=\big\langle g_x^T(x^o(t),u^o(t),t),y(t)\big\rangle.$$

Tak więc

$$\int_{t}^{t_1}\frac{d}{ds}\big\langle\lambda^o(s),y(s)\big\rangle ds=\int_{t}^{t_1}\big\langle g_x^T(x^o(s),u^o(s),s),y(s)\big\rangle ds,$$

skąd

$$\big\langle\lambda^o(t_1),y(t_1)\big\rangle-\big\langle\lambda^o(t),y(t)\big\rangle=\int_{t}^{t_1}\big\langle g_x^T(x^o(s),u^o(s),s),y(s)\big\rangle ds$$

czyli

$$\big\langle\lambda^o(t),y(t)\big\rangle=-\int_{t}^{t_1}\big\langle g_x^T(x^o(s),u^o(s),s),y(s)\big\rangle ds.$$

W szczególności dla $t=\tau$ uzyskujemy

$$\big\langle\lambda^o(\tau),y(\tau)\big\rangle=\big\langle\lambda^o(\tau),f(x^o(\tau),v,\tau)-f(x^o(\tau),u^o(\tau),\tau)\big\rangle$$

$$= -\int_{\tau}^{t_1} \big\langle g_x^T(x^o(s), u^o(s), s), y(s)\big\rangle ds.$$

Ponieważ (x^o, u^o) jest z założenia optymalnym procesem sterowania, więc zachodzi nierówność

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{G(x^\theta, u^\theta) - G(x^o, u^o)}{\theta} \geq 0.$$

Granica ta przyjmuje postać

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_{\tau-\theta}^{\tau} (g(x^\theta(t), v, t) - g(x^o(t), u^o, t))$$

$$+ \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_{\tau}^{t_1} (g(x^\theta(t), u^o(t), t) - g(x^o(t), u^o, t))$$

$$= g(x^o(\tau), v, \tau) - g(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau) + \frac{d}{d\theta} \int_{\tau}^{t_1} g(x^\theta(t), u^o(t), t) dt|_{\theta=0}$$

$$= g(x^o(\tau), v, \tau) - g(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau) + \int_{\tau}^{t_1} \big\langle g_x^T(x^o(t), u^o(t), t), y(t)\big\rangle dt \geq 0.$$

Uzyskujemy stąd

$$g(x^o(\tau), v, \tau) - g(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau) \geq -\int_{\tau}^{t_1} \big\langle g_x^T(x^o(t), u^o(t), t), y(t)\big\rangle dt$$

czyli

$$g(x^o(\tau), v, \tau) - g(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau) \geq \big\langle \lambda^o(\tau), f(x^o(\tau), v, \tau) - f(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau)\big\rangle,$$

a więc

$$-g(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau) + \big\langle \lambda^o(\tau), f(x^o(\tau), u^o(\tau), \tau)\big\rangle \geq$$
$$-g(x^o(\tau), v, \tau) + \big\langle \lambda^o(\tau), f(x^o(\tau), v, \tau)\big\rangle.$$

Ostatnią nierówność można przepisać w postaci równoważnej

$$H(\lambda^o(\tau), x^o(\tau), u^o(\tau), \tau) \geq H(\lambda^o(\tau), x^o(\tau), v, \tau) \;\; \forall v \in U.$$

Oznacza to, że sterowanie optymalne maksymalizuje hamiltonian problemu w sensie globalnym (wariacja igłowa sterowania może przybierać dowolną wartość ze zbioru U) dla prawie wszystkich $\tau \in [t_0, t_1]$. Punkt τ jest z założenie punktem ciągłości sterowania optymalnego, a punktami ciągłości każdego sterowania z klasy $PC([t_0, t_1]; R^m)$ są prawie wszystkie punkty przedziału $[t_0, t_1]$. $\square$

Warianty zasady maksimum:

1. W problemie z funkcją celu zależną od stanu końcowego końcowa zmienna sprzężona jest minus pochodną końcowego składnika funkcji celu

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt + h(x(t_1)) \Rightarrow \lambda^o(t_1) = -h_x^T(x^o(t_1)).$$

2. W problemie z zadanym stanem początkowym i końcowym

$$x^o(t_0) = x_0, \ \ x^o(t_1) = x_1$$

   początkowe i końcowe zmienne sprzężone $\lambda^o(t_0),\ \lambda^o(t_1)$ są swobodne.

3. W problemie z okresowymi warunkami stanu

$$x^o(t_0) = x^o(t_1)$$

   zmienne sprzężone są również okresowe

$$\lambda^o(t_0) = \lambda^o(t_1).$$

4. W problemie ze swobodnym czasem końcowym t_1 spełniony jest warunek zerowania się hamiltonianu

$$H(\lambda^o(t_1), x^o(t_1), u^o(t_1), t_1) = 0.$$

Dla niektórych problemów zasada maksimum pozwala określić postać sterowania optymalnego na podstawie analizy własności równań sprzężonych.

W ogólnym przypadku wykorzystanie zasady maksimum do wyznaczania sterowania optymalnego polega na redukcji problemu do dwugranicznego układu równań różniczkowych według następującego algorytmu

1. Wyznaczyć z warunku maksymalizacji hamiltonianu sterowanie w funkcji kostanu, stanu i czasu tj. funkcję $u^o(\lambda(t), x(t), t)$.

2. Zestawić układ równań kanonicznych zasady maksimum

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^o(\lambda(t), x(t), t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -f_x^T(x(t), u^o(\lambda(t), x(t), t), t)\lambda(t) + g_x^T(x(t), u^o(\lambda(t), x(t), t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\lambda(t_1) = 0,$$

co w skrócie można zapisać jak następuje

$$\dot{x}(t) = H_\lambda^T(t), \ x(t_0) = x_0, \ \dot{\lambda}(t) = -H_x^T(t), \ \lambda(t_1) = 0.$$

3. Rozwiązać układ równań kanonicznych względem $\lambda(t_0)$ tj. dobrać $\lambda(t_0)$ tak, aby po scałkowaniu układu równań kanonicznych osiągnąć $\lambda(t_1) = 0$. Do rozwiązywania tego zadania stosowane są metody obliczeniowe dwugranicznych zagadnień różniczkowych - głównie tzw. **metoda strzałów**.

Przykład: Optymalne sterowanie procesem nagrzewania indukcyjnego.

Zmienne procesowe:

$T(t)$ - temperatura nagrzewanego obiektu, $T_z(t)$ - temperatura źródła ciepła.

Równanie obiektu:

$$\frac{d}{dt}T(t) = T_z^4(t) - T^4(t), \quad t \in [0, t_1].$$

Warunki dwugraniczne:

$T(0) = T_0, \ \ T(t_1) = T_1, \ \ T_0 < T_1.$

Ograniczenia chwilowe sterowania:

$0 < T_z^{min} \leq T(t) \leq T_z^{max}, \ \ T_z^{min} < T_0.$

Kombinowany wskaźnik jakości procesu:

$G = \int_0^{t_1} dt + \int_0^{t_1} cT_z^4(t)dt$

Obiekt należy podgrzać do temperatury T_1 minimalizując zarówno czas jak i koszty nagrzewania, gdzie c jest współczynnikiem kosztów nagrzewania.

Standardowy zapis problemu:

$x(t) \doteq T(t)$ - stan obiektu, $x_0 \doteq T_0, \;\; x_1 \doteq T_1$,

$u(t) = T_z^4(t)$ - sterowanie, $u^{min} \doteq (T_z^{min})^4, \;\; u^{max} \doteq (T_z^{max})^4$.

Wyznaczyć sterowanie minimalizujące wskaźnik jakości procesu

$$G(x, u) = \int_0^{t_1} (1 + cu(t))dt$$

równanie stanu obiektu

$$\dot{x}(t) = u(t) - x^4(t), \;\; t \in [0, t_1]$$

z warunkami dwugranicznymi

$$x(0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1,$$

i z ograniczeniami chwilowymi sterowania

$$u^{min} \leq u(t) \leq u^{max}, \;\; t \in [0, t_1].$$

Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = -1 - cu(t) + \lambda(t)(u(t) - x^4(t))$$

i wydzielamy część hamiltonianu zależną od sterowania

$$\tilde{H}(\lambda(t), x(t), u(t)) = (\lambda(t) - c)u(t).$$

Z warunku maksymalizacji hamiltonianu przez sterowanie optymalne wynika, że jego postać jest określona za pomocą zmiennych sprzężonych w następujący sposób

$$u^o(t) = \begin{cases} u^{max} & gdy \;\; \lambda(t) > c, \\ u^{min} & gdy \;\; \lambda(t) < c, \\ u(t) \in [u^{min}, u^{max}] & gdy \;\; \lambda(t) = c. \end{cases} \tag{1}$$

Równanie sprzężone ma postać równania różniczkowego

$$\dot{\lambda}(t) = 4x^3(t)\lambda(t)$$

ze swobodnymi warunkami granicznymi dla $\lambda(0),\ \lambda(t_1)$.

Załóżmy, że $u^o(t) \in (u^{min}, u^{max})$ na podprzedziale $[\tau_0, \tau_1] \subset [0, t_1],\ \ \tau_0 < \tau_1$. Wtedy z warunku maksymalizacji hamiltonianu wynika, że zmienna sprzężona jest stała na tym podprzedziale $\lambda(t) = c,\ t \in [\tau_0, \tau_1]$. Natomiast z równania sprzężonego wynika, że $\dot{\lambda}(t) = 4x^3\lambda(t) = 4x^3c > 0$, a więc zmienna sprzężona jest funkcją rosnącą ze względu na dodatniość pochodnej. Sprzeczność ta dowodzi, że sterowanie optymalne jest typu bang-bang tj. przyjmuje wartości graniczne u^{max} lub u^{min}. Zastosowanie u^{min} na początku procesu oznaczałoby chłodzenie obiektu tj. czynność zużywającą czas i nie podnoszącą temperatury obiektu. Tak więc na początku procesu musi być stosowane sterowanie $u^o(t) = u^{max}$. Wówczas $\lambda(0) > c$ i z równania sprzężonego wynika, że $\lambda(t) > c,\ t \in [t_0, t_1]$. Optymalny czas nagrzewania można wyznaczyć rozwiązując równanie stanu aż do osiągnięcia przez stan wartości x_1.

Przykład: Optymalne sterowanie wsadowym procesem produkcyjnym.

We wsadowym reaktorze chemicznym realizowany jest proces przemiany $A \to B \to C$, gdzie A jest surowcem, B jest produktem użytecznym, zaś C jest produktem ubocznym. Reaktor wyposażony jest w obwód grzejny umożliwiający sterowanie temperaturą procesu. Należy zmaksymalizować ilość produktu użytecznego w reaktorze w chwili końcowej procesu t_1.

Wprowadzamy zmienne procesowe

$x_1(t)$ -stężenie surowca A w reaktorze w chwili t, $x_2(t)$ - stężenie produktu B w rektorze w chwili t, $u(t)$ - temperatura w reaktorze w chwili t.

Zapisujemy równania stanu

$$\dot{x}_1(t) = -\varkappa_1(u(t))x_1(t),\ \ t \in [0, t_1],\ \ x_1(0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = \varkappa_1(u(t))x_1(t) - \varkappa_2(u(t))x_2(t),\ \ x_2(0) = x_{20},$$

gdzie wpływ temperatury na przebieg poszczególnych reakcji określają funkcje $\varkappa_i$ zgodnie z prawem Arrheniusa

$$\varkappa_i(u(t)) \doteq \varkappa_{i0}e^{-\beta_i/u(t)},\ \ i = 1, 2,\ \ \beta_2 > \beta_1.$$

Formułujemy cel sterowania: zminimalizować wskaźnik jakości procesu

$$G(x, u) = -x_2(t_1).$$

W problemie tym zakładamy, że sterowanie temperaturowe możemy zmieniać w szerokim zakresie i jego ograniczenia chwilowe są nieistotne.

Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = \lambda_1(t)(-\varkappa_1(u(t))x_1(t)) + \lambda_2(t)(\varkappa_1(u(t))x_1(t) - \varkappa_2(u(t))x_2(t))$$

i równania sprzężone

$$\lambda_1(t) = -H_{x_1}(t) = (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\varkappa_1(u(t)), \quad \lambda_1(t_1) = 0,$$

$$\lambda_2(t) = -H_{x_2}(t) = \lambda_2(t)\varkappa_2(u(t)), ; \lambda_2(t_1) = 1.$$

Warunek maksymalizacji hamiltonianu bez ograniczeń sterowania przybiera postać

$$H_u(t) = 0,$$

skąd uzyskujemy jednoznacznie określone sterowanie w funkcji kostanu, stanu i czasu

$$u^o(\lambda(t), x(t), u(t)) = (\beta_1 - \beta_2)/ln \frac{\varkappa_{10}\beta_1 x_1(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1(t))}{\varkappa_{20}\beta_2 x_2(t)\lambda_2(t)}.$$

Układ równań kanonicznych zasady maksimum

$$\dot{x}_1(t) = -\varkappa_1(u^o(\lambda(t), x(t), u(t))x_1(t), \quad x_1(0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = \varkappa_1(u^o(\lambda(t), x(t), u(t))x_1(t) - \varkappa_2(u^o(\lambda(t), x(t), u(t))x_2(t), \quad x_2(0) = x_{20},$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\varkappa_1(u^o(\lambda(t), x(t), u(t)), \quad \lambda_1(t_1) = 0,$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_2(t)\varkappa_2(u^o(\lambda(t), x(t), u(t)), \quad \lambda_2(t_1) = 1.$$

Całkując ten układ równań różniczkowych z warunkami dwugranicznymi wyznaczamy optymalny profil temperatury.

Synteza optymalnego regulatora stanu. Układy z czasem ciągłym.

Po wyznaczeniu optymalnego (nominalnego) procesu sterowania x^o, u^o nasuwa się kwestia podtrzymywania tego procesu w warunkach małych fluktuacji parametrów obiektu sterowania. Fluktuacje te powodują odchylenie aktualnej trajektorii stanu od jej przebiegu optymalnego (nominalnego). Celem zniwelowania tego odchylenia wprowadzamy nowe współrzędne stanu i sterowania $x(t) := x(t) - x^o(t), \quad u(t) := u(t) - u^o(t)$ i określamy korektę sterowania optymalnego (nominalnego) na podstawie rozwiązania problemu liniowo-kwadratowego sterowania optymalnego (LKSO) aproksymującego problem wyjściowy w otoczeniu procesu optymalnego (nominalnego).

Aproksymujący problem LKSO dla procesów z czasem ciągłym polega na minimalizacji kwadratowego wskaźnika jakości

$$G(x,u) = 0.5x^T(t_1)Qx(t_1) + 0.5\int_0^{t_1}(x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t))dt$$

przy ograniczeniu w postaci liniowego równania stanu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0,t_1],$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0.$$

Zakładamy, że $Q \in R^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną, $P(t) \in R^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną dla $t \in [0,t_1]$, $R(t) \in R^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną dla $t \in [0,t_1]$.

Składnik wskaźnika jakości $0.5x^T(t_1)Qx(t_1)$ stanowi miarę odchylenia stanu końcowego trajektorii od jego wartości optymalnej (nominalnej). Dla $Q = I$ jest to suma kwadratów współrzędnych stanu końcowego.

Składnik wskaźnika jakości $0.5\int_0^{t_1} x^T(t)P(t)x(t)$ stanowi miarę odchylenia aktualnej trajektorii stanu od jej przebiegu optymalnego (nominalnego) w przedziale sterowania $[0,t_1]$. Dla $P(t) = I$ jest to całka z kwadratu odchylenia aktualnej trajektorii od jej przebiegu optymalnego (nominalnego) w przedziale sterowania $[0, t_1]$.

Składnik wskaźnika jakości $0.5\int_0^{t_1} u^T(t)R(t)u(t)$ określa koszty sterowania korygującego odchylenie aktualnej trajektorii od jej przebiegu optymalnego (nominalnego). Składnik ten ogranicza chwilowe wartości sterowania korygującego.

Równanie stanu jest linearyzacją wyjściowych, ogólnie biorąc, nieliniowych równań stanu na procesie optymalnym (nominalnym). Oznacza to, że $A(t) = f_x(x^o(t), u^o(t), t), \;\; B(t) = f_u(x^o(t), u^o(t), t)$.

Określenie korekty sterowania optymalnego (nominalnego) w układzie zamkniętym nazywa się **syntezą optymalnego regulatora stanu**. Do rozwiązania tego zadania zastosujemy zasadę maksimum.

Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t), x(t), u(t), t) = -0.5(x^T(t)P(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t))+\lambda^T(t)(A(t)x(t)+B(t)u(t))$$

i wydzielamy część hamiltonianu zależną od sterowania

$$\tilde{H}(\lambda(t), x(t), u(t), t) = -0.5u^T(t)R(t)u(t) + \lambda^T(t)B(t)u(t).$$

Maksymalizując hamiltonian względem sterowania korzystamy z warunku $\tilde{H}_u(t) = 0$ (na sterowanie nie są nałożone ograniczenia chwilowe) oraz ze wzoru na różniczkowanie formy kwadratowej

$$\varphi(z) \doteq 0.5z^T K z \Rightarrow \varphi_z(z) \doteq z^T K.$$

Uzyskujemy więc

$$H_u(t) = -u^{oT}(t)R(t) + \lambda^T(t)B(t) = 0 \Rightarrow R(t)u^o(t) = B^T(t)\lambda(t)$$

$$u^o(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t).$$

Sprawdzamy warunek wystarczający maksimum hamiltonianu drugiego rzędu

$$H_{uu}(t) = -R(t) \Rightarrow H_{uu}(t) < 0,$$

co oznacza, że macierz pochodnych cząstkowych hamiltonianu jest ujemnie określona i że wyznaczone rozwiązanie stanowi maksimum. Jest to maksimum globalne, gdyż jest to jedyne rozwiązanie spełniające warunki optymalności.

Określamy układ równań kanonicznych zasady maksimum niestacjonarnego problemu LKSO

$$\dot{x}(t) = H^T_\lambda(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; \dot{\lambda}(t) = -H^T_x(t), \;\; \lambda_{t_1} = -Qx(t_1)$$

tj.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t), \;\; t \in [0, t_1], \;\; x(0) = x_0,$$
$$\dot{\lambda}(t) = -A^T(t)\lambda(t) + P(t)x(t), \;\; \lambda_{t_1} = -Qx(t_1).$$

Tak więc warunki konieczne optymalności rozważanego procesu sterowania sprowadzają się do układu niestacjonarnych liniowych równań różniczkowych z warunkami dwugranicznymi. Jeden z efektywnych sposobów rozwiązywania tego układu polega na zastosowaniu tzw. niestacjonarnego liniowego podstawienia Riccatiego

$$\lambda(t) = K(t)x(t),$$

gdzie $K(t) \in R^{n\times n}$ jest macierzą Riccatiego wiążącą wektor stanu i wektor zmiennych sprzężonych niestacjonarnego problemu LKSO. Przewidywanie powiązania tych wektorów w postaci niestacjonarnej liniowej zależności jest uzasadnione przez fakt, że układ równań kanonicznych ma postać niestacjonarną liniową.

Stosujemy podstawienie Riccatiego do układu równań kanonicznych

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t),$$

$$\dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) = -A^T(t)K(t)x(t) + P(t)x(t).$$

Pierwsze z tych równań podstawiamy do drugiego

$$\dot{K}(t)x(t)+K(t)\big(A(t)+B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\big)x(t) = -A^T(t)K(t)x(t)+P(t)x(t).$$

Równanie to będzie spełnione dla każdego stanu $x(t)$, jeśli macierz $K(t)$ będzie spełniać następujące macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + P(t)$$

z warunkiem końcowym

$$K(t_1) = -Q.$$

Ostatni warunek wynika z warunku końcowego dla zmiennej sprzężonej

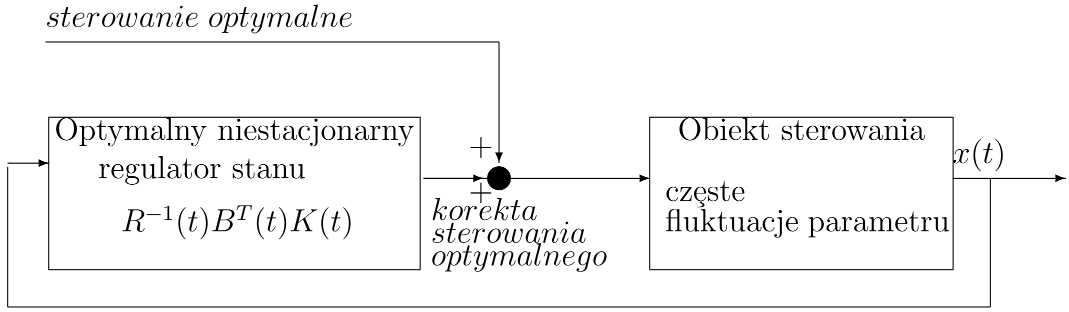
$$\big(\lambda(t_1) = -Qx(t_1) \wedge \lambda(t_1) = K(t_1)x(t_1)\big) \Rightarrow K(t_1) = -Q.$$

Po wyznaczeniu macierzy $K(t)$ określamy rów nanie optymalnego regulatora stanu

$$u^o(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t).$$

Jest to liniowe niestacjonarne równanie macierzowe.

Układ sterowania z warstwą regulacji



Macierz Riccatiego posiada następujące własności:

1. Macierz $K(t)$ jest symetryczna.
2. Macierz $K(t)$ jest ujemnie określona.

Aby wykazać symetryczność macierzy Riccatiego porównamy równanie Riccatiego

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + P(t),$$

$$K(t_1) = -Q$$

i jego transpozycję

$$\dot{K}^T(t) = -A^T(t)K^T(t) - K^T(t)A(t) - K^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K^T(t) + P(t),$$

$$K^T(t_1) = -Q.$$

Macierz $K^T(t)$ jest rozwiązaniem tego samego równania różniczkowego co i macierz $K(t)$ z tym samym warunkiem końcowym. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych wynika, że musi zachodzić równość

$$K^T(t) = K(t),$$

co oznacza, że macierz $K(t)$ jest symetryczna.

Aby wykazać ujemną określoność macierzy Riccatiego zapisujemy na podstawie równania Riccatiego zależność

$$0 = x^T(t)\big(P(t) - A^T(t)K(t) - K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - \dot{K}(t)\big)x(t)$$

$$= x^T(t)\big(P(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - (A(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t))^T K(t)$$
$$- \dot{K}(t) - K(t)(A(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t))\big)x(t)$$

$$= x^T(t)P(t)x(t) + x^T(t)K(t)B(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)$$
$$- \dot{x}^T(t)K(t)x(t) - x^T(t)\dot{K}(t)x(t) - x^T(t)K(t)\dot{x}(t)$$

$$= x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) - (\dot{x}^T(t)K(t)x(t) + x^T(t)\dot{K}(t)x(t) + x^T(t)K(t)\dot{x}(t))$$

tj.

$$-(x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)) = -\frac{d}{dt}(x^T(t)K(t)x(t)).$$

Całkując ostatnie wyrażenie w granicach od t_1 do t uzyskujemy

$$-\int_{t_1}^{t}(x^T(s)P(s)x(s) + u^T(s)R(s)u(s))ds = -\int_{t_1}^{t}\frac{d}{ds}(x^T(s)K(s)x(s))ds$$

czyli

$$\int_{t}^{t_1}(x^T(s)P(s)x(s) + u^T(s)R(s)u(s))ds = x^T(t_1)(t_1)K(t_1)x(t_1) - x^T(t)K(t)x(t)$$
$$= -x^T(t_1)Qx(t_1) - x^T(t)K(t)x(t)$$

i ostatecznie

$$x^T(t_1)Qx(t_1) + \int_t^{t_1} (x^T(s)P(s)x(s) + u^T(s)R(s)u(s))ds = -x^T(t)K(t)x(t).$$

Ponieważ macierze Q i $P(t)$ są dodatnio półokreślone, a macierz $R(t)$ jest dodatnio określona, więc wyrażenie po lewej stronie ostatniego równania jest zawsze dodatnie. Oznacza to, że macierz $K(t)$ po prawej stronie tego wyrażenia jest ujemnie określona dla wszystkich $t \in [0, t_1]$.

Równanie Riccatiego rozwiązywane jest metodami numerycznymi jako równanie różniczkowe z zadanym warunkiem końcowym.

Symetryczność macierzy Riccatiego jest wykorzystywana do redukcji zmiennych w równaniu Riccatiego - może być to istotne w przypadku układów o dużej liczbie zmiennych stanu. Ujemna określoność macierzy Riccatiego umożliwia jednoznaczne wyznaczenie optymalnego regulatora stanu dla układów stacjonarnych z nieskończonym horyzontem czasowym sterowania.

Jeśli fluktuacje parametru obiektu są stosunkowo rzadkie, to podstawą do wyznaczenia sterowanie korygującego może być rozwiązanie następującego stacjonarnego problemu LKSO: zminimalizować wskaźnik jakości

$$G(x, u) = 0.5 \int_0^{\infty} (x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

przy ograniczeniach w postaci liniowego stacjonarnego równania stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, +\infty)$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0$$

i końcowym

$$x(\infty) = 0.$$

Zakładamy, że macierze P i R są dodatnio określone. Macierze A i B mogą być uśrednieniami macierzy Jacobiego $f_x(x^o, u^o(t), t)$, $f_u(x^o, u^o(t), t)$ wyjściowego równania stanu na procesie optymalnym tj.

$$A = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f_x(x^o, u^o(t), t)dt,$$

$$B = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_u(x^o, u^o(t), t)dt.$$

Warunek początkowy x_0 stanowi odchylenie początkowe aktualnego stanu od stanu optymalnego (nominalnego). Ponieważ z założenia zaburzenia stanu są stosunkowo rzadkie, więc mamy do dyspozycji długi horyzont czasowy dla zregulowania zaistniałego zaburzenia stanu. Przyjmując idealny przypadek nieskończonego horyzontu czasowego regulacji stanu stawiamy wymaganie pełnej niwelacji zaburzenia stanu $x(\infty) = 0$. Dlatego stan końcowy nie pojawia się we wskaźniku jakości.

Stacjonarny problem LKSO rozwiążemy stosując zasadę maksimum. Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = -0.5(x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t)) + \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t))$$

i wydzielamy jego część zależną od sterowania

$$\tilde{H}(\lambda(t), x(t), u(t)) = -0.5u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)Bu(t).$$

Maksymalizując hamiltonian względem sterowania korzystamy z warunku $\tilde{H}_u(t) = 0$ (na sterowanie nie są nałożone ograniczenia chwilowe) oraz ze wzoru na różniczkowanie formy kwadratowej

$$\varphi(z) \doteq 0.5z^TKz \Rightarrow \varphi_z(z) \doteq z^TK.$$

Uzyskujemy więc

$$H_u(t) = -u^{oT}(t)R + \lambda^T(t)B = 0 \Rightarrow Ru^o(t) = B^T\lambda(t)$$

i stąd

$$u^o(t) = R^{-1}B^T\lambda(t).$$

Sprawdzamy warunek wystarczający optymalności drugiego rzędu

$$H_{uu}(t) = -R \Rightarrow H_{uu}(t) < 0,$$

co oznacza, że macierz pochodnych cząstkowych hamiltonianu jest ujemnie określona i że wyznaczone rozwiązanie stanowi maksimum. Jest to maksimum globalne, gdyż jest to jedyne rozwiązanie spełniające warunki optymalności.

Określamy układ równań kanonicznych zasady maksimum stacjonarnego problemu LKSO

$$\dot{x}(t) = H_\lambda^T(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; x(\infty) = 0, \;\; \dot{\lambda}(t) = -H_x^T(t),$$

tj.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BR^{-1}B^T\lambda(t), \ \ t \in [0, t_1], \ \ x(0) = x_0, \ \ x(\infty) = 0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T\lambda(t) + Px(t).$$

Tak więc warunki konieczne optymalności rozważanego procesu sterowania sprowadzają się do układu stacjonarnych liniowych równań różniczkowych z warunkami dwugranicznymi. Jeden z efektywnych sposobów rozwiązywania tego układu polega na zastosowaniu tzw. stacjonarnego liniowego podstawienia Riccatiego

$$\lambda(t) = Kx(t),$$

gdzie $K \in R^{n\times n}$ jest macierzą Riccatiego wiążącą wektor stanu i wektor zmiennych sprzężonych stacjonarnego problemu LKSO. Przewidywanie powiązania tych wektorów w postaci stacjonarnej liniowej zaleności jest uzasadnione przez fakt, że układ równań kanonicznych ma postać stacjonarną liniową.

Stosując stacjonarne podstawienie Riccatiego do pierwszego równania kanonicznego zasady maksimum uzyskujemy równanie stanu zamkniętego układu jego regulacji

$$\dot{x}(t) = (A + BR^{-1}B^TK)x(t).$$

Stosując to podstawienie do drugiego równania kanonicznego zasady maksimum uzyskujemy równanie dla określenia macierzy K

$$K\dot{x}(t) = -A^TKx(t) + Px(t)$$

tj.

$$K(A + BR^{-1}B^TK)x(t) = -A^TKx(t) + Px(t),$$

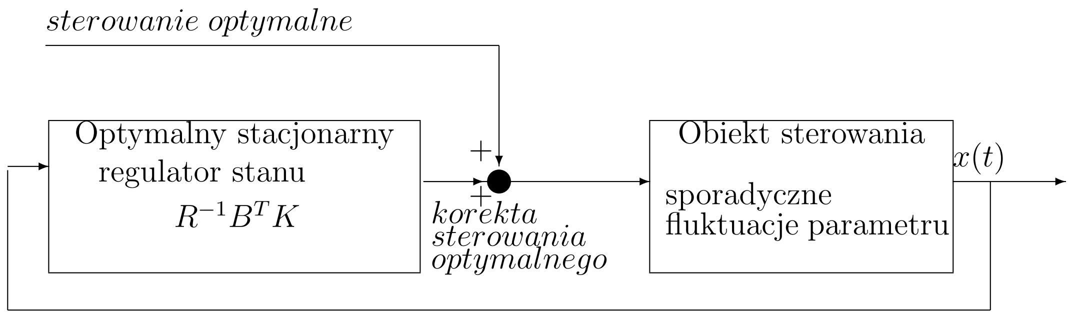
co oznacza, że macierz K powinna spełniać macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego

$$KA + A^TK + KBR^{-1}B^TK - P = 0.$$

W teorii równań macierzowych dowodzi się, że macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego posiada wśród wielu rozwiązań jedno i tylko jedno rozwiązanie ujemnie określone $K < 0$. To właśnie rozwiązanie stosujemy do określenia optymalnego stacjonarnego regulatora stanu

$$u^o(t) = R^{-1}B^TKx(t).$$

Układ sterowania z warstwą regulacji



Przeprowadzimy analizę stabilności optymalnego stacjonarnego układu regulacji stanu. W tym celu zdefiniujemy funkcję Lapunowa tego układu w postaci

$$V(x) = -x^TKx.$$

Ponieważ $K < 0$, więc pierwszy i trzeci postulat definicji funkcji Lapunowa jest spełniony.

Celem weryfikacji drugiego postulatu funkcji Lapunowa obliczymy pochodną tej funkcji wzdłuż trajektorii stanu układu

$$\dot{V}(x) = -\dot{x}^TKx - x^TK\dot{x} = -x^T(A+BR^{-1}B^TK)^TKx - x^TK(A+BR^{-1}B^TK)x$$

$$= -x^T(KA + A^TK + KBR^{-1}B^TK + KBR^{-1}B^TK)x$$

$$-x^T(P + KBR^{-1}B^TK)x.$$

Macierz P jest z założenia dodatnio określona, a wyrażenie $x^TKBR^{-1}B^TKx = z^TR^{-1}z$ jest nieujemnie określone, gdyż macierz R^{-1} jest dodatnio określona. Jeśli spełniony jest dodatkowy warunek

$$x \neq 0 \Rightarrow z = B^TKx \neq 0,$$

to ostatnie wyrażenie jest dodatnio określone nawet jeśli macierz P jest tylko nieujemnie określona. Wynika stąd, że optymalny układ regulacji stanu jest asymptotycznie stabilny tj. $x(\infty) = 0$. Będzie on również asymptotycznie stabilny nawet jeśli macierz P jest tylko nieujemnie określona, jeśli wartości własne macierzy zamkniętego układu regulacji mają ujemne części rzeczywiste.

Przykład: Wyznaczyć optymalny regulator stanu jeśli mamy do czynienia z częstymi fluktuacjami parametru obiektu i problem LKSO jest postaci

$$G(x,u) = 0.5x^2(t_1) + 0.5\int_0^{t_1} u^2(t)dt,$$

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t),$$

$$x(0) = x_0.$$

Zestawiamy dane dla równania Riccatiego $A = 1,\ B = 1,\ Q = 1,\ P = 0,\ R = 1$ i zapisujemy to równanie

$$\dot{K}(t) = -2K(t) - K^2(t), \quad K(t_1) = -1.$$

Dla takiego szczególnego przypadku znane jest analityczne rozwiązanie równania Riccatiego

$$K(t) = -2/(1 + e^{2*(t-t_1)}).$$

Tak więc równanie optymalnego niestacjonarnego ma postać

$$u^o(t) = R^{-1}B^TK(t)x(t) \Rightarrow u^o(t) = -2x(t)/(1 + e^{2*(t-t_1)}).$$

Przykład: Wyznaczyć optymalny regulator stanu jeśli mamy do czynienia ze sporadycznymi fluktuacjami parametru obiektu i problem LKSO jest postaci

$$G(x,u) = 0.5\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + u^2(t))dt$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

$$x(0) = x_0.$$

Zapisujemy dane dla zestawienia równania Riccatiego

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = 0,\ P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, R = 1,\ K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Zapisujemy macierzowe równanie Riccatiego

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To macierzowe równanie jest równoważne trzem skalarnym równaniom postaci

$$k_2^2 = 1, \;\; k_1 + k_2 k_3 = 0, \;\; 2k_2 + k_3^2 = 0,$$

które mają rozwiązanie

$$k_1 = -\sqrt{2}, \;\; k_2 = -1, \;\; k_3 = -\sqrt{2}$$

tj.

$$K = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Macierz K jest ujemnie określona, gdyż jej minory główne zmieniają znak począwszy od znaku ujemnego$\Delta_1 = -1, \;\; \Delta_2 = 2 - 1 = 1$.

Aby sprawdzić, czy zamknięty układ regulacji stanu jest asymptotycznie stabilny, wyznaczamy równanie stanu tego układu

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t), \;\; \tilde{A} = (A + BR^{-1}B^T K)$$

tj.

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} x(t),$$

a zatem

$$sI - \tilde{A} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i wartości własne układu regulacji stanu $s_{1,2} = (-1 \pm \jmath)/\sqrt{2}$ mają ujemne części rzeczywiste. Optymalny regulator stanu jest więc asymptotycznie stabilny.

Przykład: Minimalizacja zużycia surowca w chemicznym procesie produkcyjnym.

W przepływowym reaktorze chemicznym zachodzi proces przemiany surowca A w produkt użyteczny B i w produkt uboczny C. Wyróżniamy zmienne stanu

• $x_1(t)$ - stężenie surowca A w reaktorze, $x_2(t)$ - stężenie produktu użytecznego B w reaktorze,

• $u_1(t)$ - stężenia surowca A w strumieniu wejściowym reaktora, $u_2(t)$ - natężenie przepływu mieszaniny przez reaktor.

Należy minimalizować średnie zużycie surowca

$$G(x,u) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u_1(t)u_2(t)dt$$

uwzględniając równania stanu procesu

$$\dot{x}(t) = u_1(t)u_2(t) - u_2(t)x_1(t) - 3x_1^2(t) - ax_1(t),$$

$$\dot{x}(t) = -u_2(t)x_2(t) + 3x_1^2(t),$$

ograniczenia technologiczne w postaci zadanego średniego poziomu nieprzereagowanego surowca i średniego poziomu produkcji składnika użytecznego

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x_i(t)dt = 1/3, \quad i = 1,2,$$

oraz ograniczenia chwilowe stanu i sterowania

$$0 \le x_i(t), \quad 0 \le u_i(t) \le 2, \quad i = 1,2,$$

przy czym a jest parametrem o nominalnej wartości $a = 1$, który jednak podlega częstym fluktuacjom.

Zakładamy, że proces należy prowadzić na optymalnym poziomie statycznym $(\bar{x}_1^o, \bar{x}_2^o, \bar{u}_1^o, \bar{u}_2^0) = (1/3, 1/3, 1, 1)$.

W związku z potrzebą niwelowania wpływu fluktuacji parametru a na przebieg procesu formułujemy problem LKSO stanowiący podstawę syntezy optymalnego niestacjonarnego regulatora stanu: zminimalizować odchylenie procesu aktualnego od procesu optymalnego w skończonym czasie t_1 skorelowanym z częstością fluktuacji parametru

$$x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) + \int_0^{t_1} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t))dt$$

uwzględniając liniową aproksymację równań stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} u(t)$$

i zaburzenie stanu początkowego

$$x(0) = x_0.$$

Celem wyznaczenia optymalnego regulatora stanu należy rozwiązać następujące równanie różniczkowe Riccatiego

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_1(t) & \dot{k}_2(t) \\ \dot{k}_2(t) & \dot{k}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z zadanym macierzowym warunkiem końcowym

$$\begin{pmatrix} k_1(t_1) & k_2(t_1) \\ k_2(t_1) & k_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego z zadanym warunkiem końcowym rozwiązujemy za pomocą metod numerycznych np. przy użyciu procedury NDSolve w systemie "Mathematica".

Jeśli fluktuacje parametru obiektu są sporadyczne, to podstawę do syntezy optymalnego stacjonarnego regulatora stanu stanowi rozwiązanie następującego problemu LKSO: zminimalizować odchylenie procesu aktualnego od procesu optymalnego w nieskończonym czasie $t_1 = +\infty$

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t))dt$$

uwzględniając liniową aproksymację równań stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} u(t)$$

i zaburzenie stanu początkowego

$$x(0) = x_0.$$

Celem syntezy optymalnego stacjonarnego regulatora stanu należy rozwiązać następujące macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To macierzowe równanie Riccatiego można również rozwiązywać przy użyciu metod numerycznych np. za pomocą procedury NSolve w systemie "Mathematica".

Synteza uogólnionego optymalnego regulatora stanu. Układy z czasem ciągłym.

W uogólnionym problemie syntezy optymalnego regulatora stanu do wskaźnika jakości właczamy nie tylko składniki zapewniające minimalizację odchylenia trajektorii aktualnej od trajektorii optymalnej za pomocą sterowań korygujących o małej amplitudzie lecz także składniki wynikające z liniowo-kwadratowej aproksymacji pierwotnego wskaźnika jakości zapewniające zmniejszenie strat jakości procesu w czasie regulacji zaburzenia stanu. Podstawę do wyznaczania uogólnionego optymalnego regulatora stanu stanowi rozwiązanie następującego uogólnionego niestacjonarnego problemu LKSO: zminimalizować wskaźnik jakości procesu regulacji stanu

$$G(x,u) = q^T x(t_1) + 0.5 x^T(t_1) Q x(t_1) + \int_0^{t_1} (p^T(t)x(t) + r^T(t)u(t))dt$$

$$+0.5 \int_0^{t_1} (x^T(t)P(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t))dt$$

uwzględniając liniowe równanie stanu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0, t_1],$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0.$$

Dodatkowe składniki wskaźnika jakości uogólnionego niestacjonarnego problemu LKSO mogą wynikać z aproksymacji nieliniowego wskaźnika jakości

$$\boldsymbol{G}(x,u) = h(x(t_1)) + \int_0^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt$$

wyjściowego problemu sterowania tj.

$$q = h_x(x^o(t_1)),\ Q = \alpha I + h_{xx}(x^o(t_1)),$$

$$p(t) = g_x(x^o(t),u^o(t),t),\ P(t) = \beta I + g_{xx}(x^o(t),u^o(t),t),$$
$$r(t) = g_u(x^o(t),u^o(t),t),\ R(t) = \gamma I + g_{uu}(x^o(t),u^o(t),t),$$

gdzie α, β, γ są dodatnimi współczynnikami wagowymi zapewniającymi nieujemną określoność macierzy Q i $P(t)$ oraz dodatnią określoność macierzy $R(t)$ (tj. zapewniającymi pierwotną funkcję wskaźnika jakości problemu LKSO jako miary odchylenia procesu rzeczywistego od procesu optymalnego). Wprowadzenie dodatkowych składników aproksymujących pierwotny wskaźnik jakości procesu pozwala zmniejszyć straty jakości procesu w trakcie regulacji stanu. Tak zmodyfikowane macierze Q, $P(t)$, $R(t)$ nie muszą mieć postaci diagonalnej.

Do wyznaczenia optymalnego regulatora stanu zastosujemy zasadę maksimum. Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t),x(t),u(t),t) = -(p^T(t)x(t)+r^T(t)u(t))-0.5(x^T(t)P(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t))$$
$$+\lambda^T(t)(A(t)x(t)+B(t)u(t))$$

i wydzielamy jego część zależną od sterowania

$$\tilde{H}(\lambda(t),x(t),u(t),t) = -r^T(t)u(t) - 0.5u^T(t)R(t)u(t) + \lambda^T(t)B(t)u(t).$$

Przyrównanie pochodnej $H_u(t)$ do zera daje w wyniku

$$-r^T(t) - u^T(t)R(t) + \lambda^T(t)B(t) = 0 \Rightarrow u^o(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) - R^{-1}r(t).$$

Oczywiście

$$H_{uu}(t) = -R(t) < 0,$$

a więc wyznaczone rozwiązanie maksymalizuje hamiltonian problemu w sensie globalnym. Sterowanie to podstawiamy do układu równań kanonicznych zasady maksimum

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}B^T(t)\lambda(t) - B(t)R^{-1}(t)r(t),\ \ x(0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = P(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t) + p(t), \;\; \lambda(t_1) = -q - Qx(t_1).$$

Do rozwiazania tego układu równań różniczkowych z warunkami dwugranicznymi wygodnie jest zastosować podstawienie Riccatiego z wyrazem wolnym, gdyż uklad ten posiada wyrazy wolne:

$$\lambda(t) = K(t)x(t) + l(t),$$

gdzie $l(t) \in R^n$

Stosując podstawienie Riccatiego z wyrazem wolnym do układu równań kanonicznych uzyskujemy

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}B^T(t)(K(t)x(t) + l(t)) - B(t)R^{-1}(t)r(t), \;\; x(0) = x_0,$$

$$\dot{K(t)}x(t) + K(t)\dot{x}(t) + \dot{l}(t) = P(t)x(t) - A^T(t)(K(t)x(t) + l(t)) + p(t).$$

Podstawiamy pierwsze równanie do drugiego

$$\dot{K(t)}x(t) + K(t)\big(A(t)x(t) + B(t)R^{-1}B^T(t)(K(t)x(t) +$$

$$l(t)) - B(t)R^{-1}(t)r(t)\big) + \dot{l}(t) = P(t)x(t) - A^T(t)(K(t)x(t) + l(t)) + p(t).$$

Równanie powyższe będzie spełnione, jeśli będzie spełnione macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego wyzerowujące wyrazy związane z wektorem stanu $x(t)$

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + P(t), \;\; K(t_1) = -Q,$$

i jeśli będzie spełnione równanie różniczkowe dla wyrazu wolnego

$$\dot{l}(t) = K(t)B(t)R^{-1}(t)(B^T(t)l(t) - r(t)) + p(t), \;\; l(t_1) = -q.$$

Równanie uogólnionego optymalnego regulatora stanu przybiera postać

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) + R^{-1}(t)(l(t) - r(t)).$$

Tak więc celem syntezy uogólnionego optymalnego niestacjonarnego regulatora stanu rozwiązujemy najpierw macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego, a następnie, korzystając ze znajomości macierzy $K(t)$, wyznaczamy rozwiązanie pomocniczego równania różniczkowego dla wektora $l(t)$.

Jeśli fluktuacje parametru obiektu sterowania są sporadyczne, to możemy posłużyć się stacjonarnym regulatorem stanu. Podstawę do syntezy uogólnionego optymalnego stacjonarnego regulatora stanu stanowi rozwiązanie następującego problemu LKSO

zminimalizować wskaźnik jakości

$$G(x,u) = \int_0^{\infty} (p^T x(t) + 0.5x^T(t)Px(t) + r^T u(t) + 0.5u^T(t)Ru(t))dt$$

przy ograniczeniach w postaci liniowego stacjonarnego równania stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \;\; t \in [0, +\infty)$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0$$

i końcowym

$$x(\infty) = 0.$$

Dodatkowe składniki wskaźnika jakości uogólnionego stacjonarnego problemu LKSO mogą wynikać z aproksymacji nieliniowego wskaźnika jakości wyjściowego problemu sterowania

$$\boldsymbol{G}(x,u) = \int_0^{\infty} g(x(t), u(t), t)dt$$

w następującej postaci uśrednionej

$$p = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g_x(x^o(t), u^o(t), t)dt, \;\; P = \beta I + \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g_{xx}(x^o(t), u^o(t), t)dt,$$

$$r = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g_u(x^o(t), u^o(t), t)dt, \;\; R = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \gamma I + g_{uu}(x^o(t), u^o(t), t)dt,$$

gdzie $\beta, \;\; \gamma$ są dodatnimi współczynnikami wagowymi zapewniającymi nieujemną określoność macierzy P oraz dodatnią określoność macierzy R (tj. zapewniającymi pierwotną funkcję wskaźnika jakości problemu LKSO jako miary odchylenia procesu rzeczywistego od procesu optymalnego). Wprowadzenie dodatkowych składników aproksymujących pierwotny wskaźnik jakości procesu pozwala zmniejszyć straty jakości procesu w trakcie regulacji stanu. Tak zmodyfikowane macierze $P, \;\; R$ nie muszą mieć postaci diagonalnej.

Macierze A i B mogą być uśrednieniami macierzy Jacobiego

$$f_x(x^o, u^o(t), t), \;\; f_u(x^o, u^o(t), t)$$

wyjściowego równania stanu na procesie optymalnym tj.

$$A = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_x(x^o, u^o(t), t)dt,$$

$$B = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_u(x^o, u^o(t), t)dt.$$

Warunek początkowy x_0 stanowi odchylenie początkowe aktualnego stanu od stanu optymalnego (nominalnego). Ponieważ z założenia zaburzenia stanu są stosunkowo rzadkie, więc mamy do dyspozycji długi horyzont czasowy dla zregulowania zaistniałego zaburzenia stanu. Przyjmując idealny przypadek nieskończonego horyzontu czasowego regulacji stanu stawiamy wymaganie pełnej niwelacji zaburzenia stanu $x(\infty) = 0$. Dlatego stan końcowy nie pojawia się we wskaźniku jakości uogólnionego stacjonarnego problemu LKSO.

Uogólniony stacjonarny problem LKSO rozwiążemy stosując zasadę maksimum. Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = -(p^T x(t) + 0.5x^T(t)Px(t) + r^T u(t) + 0.5u^T(t)Ru(t))$$
$$+\lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t))$$

i wydzielamy jego część zależną od sterowania

$$\tilde{H}(\lambda(t), x(t), u(t)) = -(r^T u(t) + 0.5u^T(t)Ru(t)) + \lambda^T(t)Bu(t).$$

Maksymalizując hamiltonian względem sterowania korzystamy z warunku $\tilde{H}_u(t) = 0$ (na sterowanie nie są nałożone ograniczenia chwilowe) oraz ze wzoru na różniczkowanie formy kwadratowej

$$\varphi(z) \doteq 0.5z^T Kz \Rightarrow \varphi_z(z) = z^T K.$$

Uzyskujemy więc

$$H_u(t) = -r^T - u^{oT}(t)R + \lambda^T(t)B = 0 \Rightarrow Ru^o(t) = B^T\lambda(t) - r$$

i stąd

$$u^o(t) = R^{-1}B^T\lambda(t) - R^{-1}r.$$

Sprawdzamy warunek wystarczający optymalności drugiego rzędu

$$H_{uu}(t) = -R \Rightarrow H_{uu}(t) < 0,$$

co oznacza, że macierz pochodnych cząstkowych hamiltonianu jest ujemnie określona i że wyznaczone rozwiązanie stanowi maksimum. Jest to maksimum globalne, gdyż jest to jedyne rozwiązanie spełniające warunki optymalności.

Określamy układ równań kanonicznych zasady maksimum uogólnionego stacjonarnego problemu LKSO

$$\dot{x}(t) = H_{\lambda}^{T}(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; x(\infty) = 0, \;\; \dot{\lambda}(t) = -H_{x}^{T}(t),$$

tj.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BR^{-1}B^{T}\lambda(t) - BR^{-1}r, \;\; t \in [0, t_1], \;\; x(0) = x_0, \;\; x(\infty) = 0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^{T}\lambda(t) + Px(t) + p.$$

Tak więc warunki konieczne optymalności rozważanego procesu sterowania sprowadzają się do układu stacjonarnych liniowych równań różniczkowych z warunkami dwugranicznymi. Jeden z efektywnych sposobów rozwiązywania tego układu polega na zastosowaniu tzw. uogólnionega stacjonarnego liniowego podstawienia Riccatiego

$$\lambda(t) = Kx(t) + l,$$

gdzie $K \in R^{n\times n}$ jest macierzą Riccatiego wiążącą wektor stanu i wektor zmiennych sprzężonych stacjonarnego problemu LKSO, a $l \in R^{n}$ jest wyrazem wolnym podstawienia Riccatiego. Przewidywanie powiązania tych wektorów w postaci uogólnionej stacjonarnej liniowej zależności jest uzasadnione przez fakt, że układ równań kanonicznych ma postać stacjonarną liniową z wyrazami wolnymi.

Stosując uogólnione stacjonarne podstawienie Riccatiego do pierwszego równania kanonicznego zasady maksimum uzyskujemy równanie stanu zamkniętego układu jego regulacji

$$\dot{x}(t) = (A + BR^{-1}B^{T}K)x(t) + BR^{-1}B^{T}l - BR^{-1}r.$$

Stosując to podstawienie do drugiego równania kanonicznego zasady maksimum uzyskujemy

$$K\dot{x}(t) = -A^{T}Kx(t) - A^{T}l + Px(t) + p.$$

Podstawiamy pierwsze równanie do drugiego otrzymując

$$K(A+BR^{-1}B^{T}K)x(t)+KBR^{-1}B^{T}l-KBR^{-1}r = -A^{T}Kx(t)-A^{T}l+Px(t)+p.$$

Stąd wynikają równania dla określenia macierzy K i wektora l. Macierz K powinna spełniać macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego

$$KA + A^T K + KBR^{-1}B^T K - P = 0,$$

zaś wektor l powinien spełniać liniowe równanie macierzowe

$$(KBR^{-1}B^T + A^T)l = KBR^{-1}r + p.$$

W teorii równań macierzowych dowodzi się, że macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego posiada wśród wielu rozwiązań jedno i tylko jedno rozwiązanie ujemnie określone $K < 0$. To właśnie rozwiązanie K oraz wektor l stosujemy do określenia uogólnionego optymalnego stacjonarnego regulatora stanu

$$u^o(t) = R^{-1}B^T Kx(t) + R^{-1}(B^T l - r).$$

Przykład: Minimalizacja zużycia surowca w chemicznym procesie produkcyjnym.

W przepływowym reaktorze chemicznym zachodzi proces przemiany surowca A w produkt użyteczny B i w produkt uboczny C. Wyróżniamy zmienne stanu

• $x_1(t)$ - stężenie surowca A w reaktorze, $x_2(t)$ - stężenie produktu użytecznego B w reaktorze,

• $u_1(t)$ - stężenia surowca A w strumieniu wejściowym reaktora, $u_2(t)$ - natężenie przepływu mieszaniny przez reaktor.

Należy minimalizować średnie zużycie surowca

$$\boldsymbol{G}(x, u) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u_1(t)u_2(t)dt$$

uwzględniając równania stanu procesu

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t)u_2(t) - u_2(t)x_1(t) - 3x_1^2(t) - ax_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -u_2(t)x_2(t) + 3x_1^2(t),$$

ograniczenia technologiczne w postaci zadanego średniego poziomu nieprzereagowanego surowca i średniego poziomu produkcji składnika użytecznego

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau x_i(t)dt = 1/3, \quad i = 1, 2,$$

oraz ograniczenia chwilowe stanu i sterowania

$$0 \le x_i(t), \quad 0 \le u_i(t) \le 2, \quad i = 1, 2,$$

przy czym a jest parametrem o nominalnej wartości $a = 1$, który jednak podlega częstym fluktuacjom.

Zakładamy, że proces należy prowadzić na optymalnym poziomie statycznym, który uzyskujemy rozwiązując statyczne równania stanu

$$0 = \bar{u}_1\bar{u}_2 - \frac{1}{3}\bar{u}_2 - \frac{2}{3},$$

$$0 = -\frac{1}{3}\bar{u}_2 + \frac{1}{3}.$$

Wynika stąd, że statyczny proces optymalny (nominalny) jest określony jak następuje

$(\bar{x}_1^o, \bar{x}_2^o, \bar{u}_1^o, \bar{u}_2^0) = (1/3, 1/3, 1, 1)$.

Porównanie zagadnień syntezy podstawowego i uogólnionego optymalnego regulatora stanu na przykładzie chemicznego procesu produkcyjnego

W związku z potrzebą niwelowania wpływu fluktuacji parametru a na przebieg procesu formułujemy problem LKSO stanowiący podstawę syntezy podstawowego optymalnego niestacjonarnego regulatora stanu. Wprowadzamy miarę odchylenia procesu aktualnego od procesu optymalnego w skończonym czasie t_1 skorelowanym z częstością fluktuacji parametru a

$$G(x, u) = x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) + \int_0^{t_1} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t))dt.$$

W tak sformułowanym wskaźniku jakości odzwierciedlona jest jedynie potrzeba niwelacji odchylenia stanu za pomocą sterowań korygujących o małej amplitudzie.

Wyznaczamy liniową aproksymację równań stanu tj. obliczamy macierze $\bar{f}_x^o$, $\bar{f}_u^o$

$$\bar{f}_x^o = \begin{pmatrix} -\bar{u}_2 - 6\bar{x}_1 - 1 & 0 \\ 6\bar{x}_1 & -\bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_u^o = \begin{pmatrix} \bar{u}_2 & \bar{u}_1 - \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix},$$

Zapisujemy zlinearyzowane równanie stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} u(t)$$

i uwzględniamy zaburzenie stanu początkowego

$$x(0) = x_0.$$

Celem wyznaczenia podstawowej wersji optymalnego niestacjonarnego regulatora stanu rozważanego procesu należy rozwiązać następujące równanie różniczkowe Riccatiego

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_1(t) & \dot{k}_2(t) \\ \dot{k}_2(t) & \dot{k}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z zadanym macierzowym warunkiem końcowym

$$\begin{pmatrix} k_1(t_1) & k_2(t_1) \\ k_2(t_1) & k_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego z zadanym warunkiem końcowym rozwiązujemy za pomocą metod numerycznych np. przy użyciu procedury NDSolve w systemie "Mathematica".

Jeśli fluktuacje parametru obiektu są sporadyczne, to podstawę do syntezy podstawowego optymalnego stacjonarnego regulatora stanu stanowi rozwiązanie następującego problemu LKSO: zminimalizować odchylenie procesu aktualnego od procesu optymalnego w nieskończonym czasie $t_1 = +\infty$

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t))dt$$

uwzględniając liniową aproksymację równań stanu

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} u(t)$$

i zaburzenie stanu początkowego

$$x(0) = x_0.$$

Również w tym przypadku wskaźnik jakości odzwierciedla jedynie potrzebę niwelacji odchylenia stanu za pomocą sterowań korygujących o małej amplitudzie.

Celem syntezy optymalnego stacjonarnego regulatora stanu należy rozwiązać następujące macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To macierzowe równanie Riccatiego można również rozwiązywać przy użyciu metod numerycznych np. za pomocą procedury NSolve w systemie "Mathematica".

Projektując uogólniony niestacjonarny regulator stanu dla rozważanego procesu wprowadzamy do wskaźnika jakości składniki wynikające z aproksymacji pierwotnego wskaźnika jakości

$$\boldsymbol{G}(x,u) = \int_0^{\boldsymbol{t}_1} u_1(t)u_2(t)dt, \quad \boldsymbol{t}_1 >> t_1$$

w otoczeniu procesu optymalnego

$$\boldsymbol{G}(x,u) = \int_0^{\boldsymbol{t}_1} (\bar{u}_1 + \delta u_1(t))(\bar{u}_2 + \delta u_2(t))dt$$

$$\int_0^{\boldsymbol{t}_1} (\bar{u}_1\bar{u}_2 + \bar{u}_2\delta u_1(t) + \bar{u}_1\delta u_2(t) + \delta u_1(t)\delta u_2(t))dt.$$

Stąd uzyskujemy

$$r^T(t) = g^T_{\delta u}(\bar{u}^o) = (\bar{u}^o_1, \bar{u}^o_2) = (1,1),$$

$$R(t) = \beta I + g_{\delta u \delta u}(\bar{u}^o) =$$

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dodatnią określoność macierzy $R(t)$ zapewnia współczynnik wagowy $\beta > 1$ np. $\beta = 2$.

Celem wyznaczenia podstawowej wersji optymalnego niestacjonarnego regulatora stanu rozważanego procesu należy rozwiązać następujące macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_1(t) & \dot{k}_2(t) \\ \dot{k}_2(t) & \dot{k}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z zadanym macierzowym warunkiem końcowym

$$\begin{pmatrix} k_1(t_1) & k_2(t_1) \\ k_2(t_1) & k_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

oraz liniowe wektorowe równanie różniczkowe dla określenia wektora l

$$\begin{pmatrix} \dot{l}_1(t) \\ \dot{l}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(t) & k_2(t) \\ k_2(t) & k_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

z zadanym warunkiem końcowym

$$\begin{pmatrix} l_1(t_1) \\ l_2(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Projektując uogólniony stacjonarny regulator stanu dla rozważanego procesu wprowadzamy do wskaźnika jakości składniki wynikające z aproksymacji pierwotnego wskaźnika jakości określonego na długim horyzoncie czasowym

$$\boldsymbol{G}(x,u) = \int_0^{\infty} u_1(t)u_2(t)dt,$$

w otoczeniu procesu optymalnego

$$\boldsymbol{G}(x,u) = \int_0^{\infty} (\bar{u}_1 + \delta u_1(t))(\bar{u}_2 + \delta u_2(t))dt$$

$$\int_0^{\infty} (\bar{u}_1\bar{u}_2 + \bar{u}_2\delta u_1(t) + \bar{u}_1\delta u_2(t) + \delta u_1(t)\delta u_2(t))dt.$$

Stąd uzyskujemy

$$r^T = g_{\delta u}^T(\bar{u}^o) = (\bar{u}_1^o, \bar{u}_2^o) = (1, 1),$$

$$R = \beta I + g_{\delta u \delta u}(\bar{u}^o) =$$

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Celem wyznaczenia uogólnionej wersji optymalnego niestacjonarnego regulatora stanu rozważanego procesu należy rozwiązać następujące macierzowe algebraiczne równanie Riccatiego

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz liniowe równanie macierzowe dla określenia wektora l

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\times \Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Synteza optymalnego regulatora stanu procesów cyklicznych

Po wyznaczeniu optymalnego (nominalnego) cyklicznego procesu sterowania x^o, u^o nasuwa się kwestia podtrzymywania tego procesu w warunkach małych fluktuacji parametrów obiektu sterowania. Fluktuacje te powodują odchylenie aktualnej cyklicznej trajektorii stanu od jej optymalnego (nominalnego) przebiegu cyklicznego. Celem zniwelowania tego odchylenia wprowadzamy nowe współrzędne stanu i sterowania $x(t) := x(t) - x^o(t), \quad u(t) :=$

$u(t) - u^o(t)$ i określamy korektę cyklicznego sterowania optymalnego (nominalnego) na podstawie rozwiązania problemu cyklicznego liniowo-kwadratowego sterowania optymalnego (CLKSO) aproksymującego problem wyjściowy w otoczeniu cyklicznego procesu optymalnego (nominalnego).

Aproksymujący problem CLKSO dla procesów z czasem ciągłym polega na minimalizacji kwadratowego wskaźnika jakości

$$G(x,u) = 0.5\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (x^T(t)P(t)x(t) + u^T R(t)u(t))dt$$

przy ograniczeniu w postaci liniowego równania stanu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0,\tau],$$

z zadanym warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0.$$

Zakładamy, że $P(t) \in R^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną dla $t \in [0,\tau]$, $R(t) \in R^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną dla $t \in [0,\tau]$.

Składnik wskaźnika jakości $0.5\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x^T(t)P(t)x(t)$ stanowi miarę odchylenia aktualnej trajektorii stanu od jej cyklicznego przebiegu optymalnego (nominalnego) w przedziale sterowania $[0,\tau]$. Dla $P(t) = I$ jest to wartość średnia z kwadratu odchylenia aktualnej trajektorii od jej przebiegu optymalnego (nominalnego) w przedziale sterowania $[0,\tau]$.

Składnik wskaźnika jakości $0.5\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u^T(t)R(t)u(t)$ określa koszty sterowania korygującego odchylenie aktualnej trajektorii od jej cyklicznego przebiegu optymalnego (nominalnego). Składnik ten ogranicza chwilowe wartości sterowania korygującego.

Równanie stanu jest linearyzacją wyjściowych, ogólnie biorąc, nieliniowych równań stanu na cyklicznym procesie optymalnym (nominalnym). Oznacza to, że $A(t) = f_x(x^o(t), u^o(t), t)$, $B(t) = f_u(x^o(t), u^o(t), t)$, $A(0) = A(\tau)$, $B(0) = B(\tau)$ tj. macierze te są τ-okresowe.

Określenie korekty cyklicznego sterowania optymalnego (nominalnego) w układzie zamkniętym nazywa się **syntezą optymalnego cyklicznego regulatora stanu**. Do rozwiązania tego zadania zastosujemy zasadę maksimum, która dla cykliczych problemów sterowania optymalnego obowiązuje przy cyklicznych warunkach granicznych na zmienne sprzężone.

Zapisujemy hamiltonian problemu

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = -0.5(x^T(t)P(t)x(t)+u^T R(t)u(t))+\lambda^T(t)(A(t)x(t)+B(t)u(t))$$

i wydzielamy część hamiltonianu zależną od sterowania

$$\tilde{H}(\lambda(t), x(t), u(t)) = -0.5u^T R(t)u(t) + \lambda^T(t)B(t)u(t).$$

Maksymalizując hamiltonian względem sterowania korzystamy z warunku $\tilde{H}_u(t) = 0$ (na sterowanie nie są nałożone ograniczenia chwilowe) oraz ze wzoru na różniczkowanie formy kwadratowej

$$\varphi(z)0.5z^T Kz = z^T K \Rightarrow \varphi_z(z)x^T K.$$

Uzyskujemy więc

$$H_u(t) = -u^{oT}(t)R(t) + \lambda^T(t)B(t) = 0 \Rightarrow R(t)u^o(t) = B^T(t)\lambda(t)$$

$$u^o(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t).$$

Sprawdzamy warunek wystarczający optymalności drugiego rzędu

$$H_{uu}(t) = -R(t) \Rightarrow H_{uu}(t) < 0,$$

co oznacza, że macierz pochodnych cząstkowych hamiltonianu jest ujemnie określona i że wyznaczone rozwiązanie stanowi maksimum. Jest to maksimum globalne, gdyż jest to jedyne rozwiązanie spełniające warunki optymalności.

Określamy układ równań kanonicznych zasady maksimum cyklicznego problemu LKSO

$$\dot{x}(t) = H_\lambda^T(t), \;\; x(0) = x(\tau), \;\; \dot{\lambda}(t) = -H_x^T(t), \;\; \lambda(0) = \lambda(t)$$

tj.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t), \;\; t \in [0, \tau], \;\; x(0) = x(\tau),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T(t)\lambda(t) + P(t)x(t), \;\; \lambda(0) = \lambda(\tau).$$

Tak więc warunki konieczne optymalności rozważanego procesu sterowania sprowadzają się do układu niestacjonarnych liniowych równań różniczkowych z cyklicznymi warunkami granicznymi. Jeden z efektywnych sposobów rozwiązywania tego układu polega na zastosowaniu tzw. cyklicznego niestacjonarnego liniowego podstawienia Riccatiego

$$\lambda(t) = K(t)x(t),$$

gdzie $K(t) \in R^{n\times n}$ jest okresową macierzą Riccatiego wiążącą wektor stanu i wektor zmiennych sprzężonych problemu CLKSO. Przewidywanie powiązania tych wektorów w postaci niestacjonarnej liniowej zależności jest uzasadnione przez fakt, że układ równań kanonicznych ma postać niestacjonarną liniową.

Stosujemy cykliczne podstawienie Riccatiego do układu równań kanonicznych

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \quad x(0) = x(\tau)$$

$$\dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) = -A^T(t)K(t)x(t) + P(t)x(t), \quad \lambda(0) = \lambda(\tau).$$

Pierwsze z tych równań podstawiamy do drugiego

$$\dot{K}(t)x(t)+K(t)\big(A(t)+B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\big)x(t) = -A^T(t)K(t)x(t)+P(t)x(t).$$

Równanie to będzie spełnione dla każdego stanu $x(t)$, jeśli macierz $K(t)$ będzie spełniać następujące macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + P(t)$$

z cyklicznym warunkiem dwugranicznym

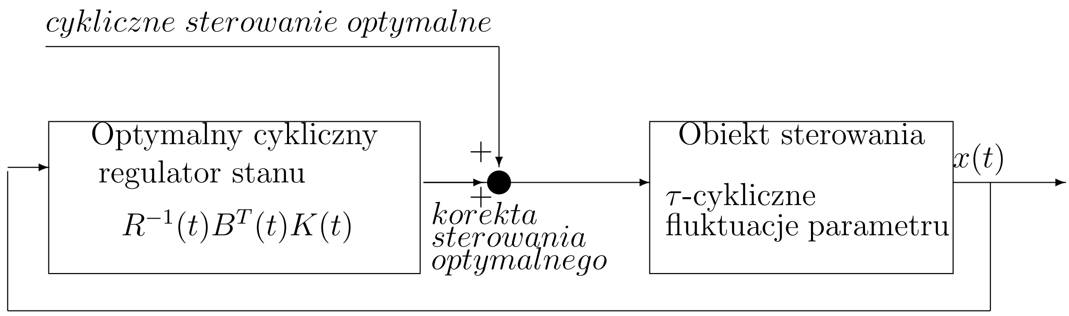
$$K(0) = K(\tau).$$

Po wyznaczeniu macierzy $K(t)$ określamy rów nanie optymalnego cyklicznego regulatora stanu

$$u^o(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t).$$

Jest to liniowe cykliczne przekształcenie macierzowe.

Układ sterowania cyklicznego z warstwą regulacji



Cykliczna macierz Riccatiego posiada następujące własności:

1. Cykliczna macierz $K(t)$ jest symetryczna.

2. Istnieje jednoznacznie określona cykliczna macierz $K(t)$ ujemnie określona.

Cykliczne rozwiązania macierzowego równania różniczkowego Riccatiego wyznaczamy stosując metodę Newtona względem warunku początkowego, którą w systemie "Mathematica" realizujemy z wykorzystaniem procedury NDSolve.