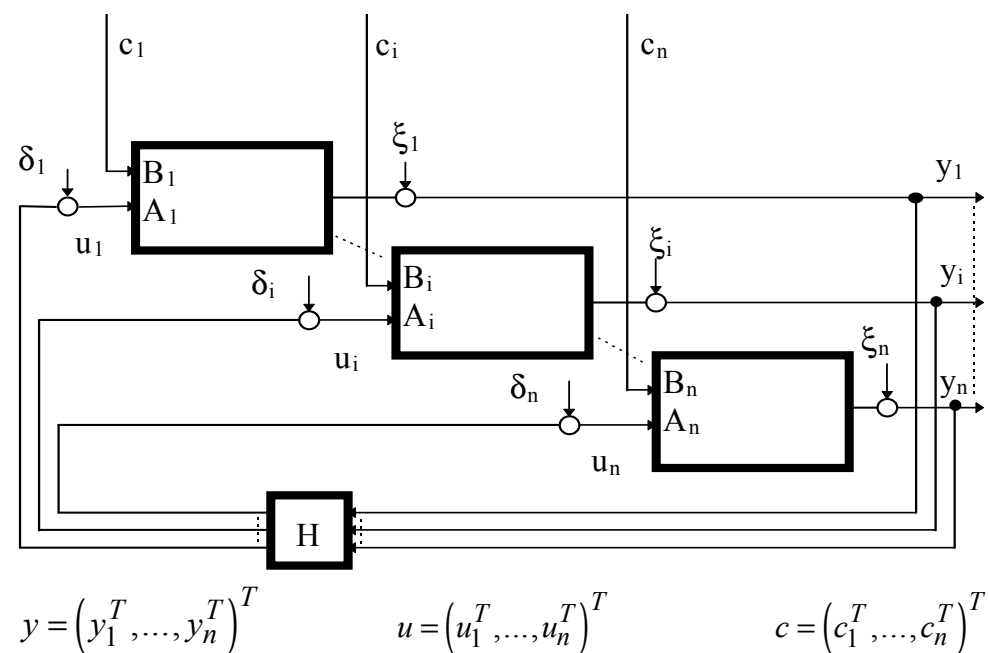


**#09**

Systemy o złożonej strukturze

- system składa się z wielu elementów, obiekty (podsystemy) wchodzące w skład systemu są ze sobą połączone i wzajemnie od siebie zależne
- mogą wystąpić ograniczenia w dostępności pomiarowej sygnałów
- identyfikowalność pojedynczych obiektów prostych wchodzących w skład systemu nie implikuje identyfikowalności całego systemu (w szczególności, że identyfikowalność parametrów systemu złożonego w warunkach deterministycznych zależy m.in. od wartości parametrów poszczególnych obiektów (podsystemów), których nie znamy oraz od struktury połączeniowej systemu)
- ewentualne sprzężenia zwrotne przenoszą zakłócenia wyjściowe na wejścia

## Obiekt identyfikacji



$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n) \quad B = \text{diag}(B_1, \dots, B_n)$$

$$H = (H_1^T, \dots, H_n^T)^T$$

$$\delta = (\delta_1^T, \dots, \delta_n^T)^T \quad \xi = (\xi_1^T, \dots, \xi_n^T)^T$$

## Opis formalny systemu

$$y = A u + B c + \xi$$

$$u = H y + \delta$$

## Założenia

**Z1:** macierz połączeń  $H$  (struktura systemu) jest znana;

**Z2:** system jest dobrze określony, tzn. dla każdej wartości pobudzenia  $c$  i każdej wartości zakłóceń  $(\delta, \xi)$  istnieje dokładnie jedna wartość wyjścia  $y$ ;

**Z3:** wartości  $c$  i  $y$  w dowolnym momencie mogą być zmierzone;

**Z4:** system przy braku zakłóceń byłby identyfikowalny;

**Z5:** zakłócenia  $\xi$  i  $\delta$  mają zerowe wartości oczekiwane i są niezależne od siebie oraz od pobudzeń  $c$ ;

**Z6:** wartości  $c$ ,  $\delta$  i  $\xi$  są takie, że uogólniona macierz pobudzeń

$$E_N = [e^1, \dots, e^N]$$

gdzie  $e = (c^T, \theta^T)^T$  oraz  $\theta = A\delta + \xi$  jest zagregowanym zakłóceniem przeniesionym na wyjście systemu, jest - dla  $N \geq \dim e$  - pełnego rzędu z prawdopodobieństwem 1, tj.  $\text{rank } E_N = \dim e$ .

## Cel

odkrycie prawdziwych wartości współczynników w liniowych opisach każdego obiektu wchodzącego w skład systemu (zawartych w macierzach  $A$  i  $B$ ) na podstawie pomiarów  $c^k$  i  $y^k$  ( $k=1..N$ ) uzyskanych w eksperymencie.

## Opis kompaktowy (równania pomiarów)

$$y = Kc + G\theta$$

gdzie

$$G = (I - AH)^{-1}$$

$$K = GB$$

## Estymacja metodą najmniejszych kwadratów

$$V_{iN} = (A_i, B_i)W_{iN} + \Theta_{iN} \quad \text{gdzie } \Theta_{iN} = (\theta_i^1, \dots, \theta_i^N)$$

$$V_{iN}W_{iN}^T = (A_i, B_i)W_{iN}W_{iN}^T + \Theta_{iN}W_{iN}^T$$

$$\boxed{(A_{iN}, B_{iN}) = V_{iN}W_{iN}^T (W_{iN}W_{iN}^T)^{-1}}$$

gdzie

$$w_i^k = \left( \tilde{u}_i^{kT}, c_i^{kT} \right)^T \quad V_{iN} = [v_i^1, \dots, v_i^N] \quad W_{iN} = [w_i^1, \dots, w_i^N]$$

$\tilde{u}_i^k = H_i v^k$        $v^k$  jest wynikiem pomiaru wyjścia  $y^k$

*Przypadek 1)* brak zakłóceń pomiarowych:  $v^k = y^k$ ,

*Przypadek 2)* obecność zakłóceń pomiarowych:  $v^k = y^k + \eta^k$ .

### Zasadnicza wada estymatora

asymptotycznie obciążony

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}(A_{iN}, B_{iN}) \neq (A_i, B_i)$$

przyczyna: występowanie strukturalnego sprzężenia zwrotnego w systemie, a co za tym idzie – skorelowanie zachodzące pomiędzy zakłóceniami (zagregowanymi)  $\theta_i$ , działającymi na wyjścia podsystemów, a wejściami interakcyjnymi  $u_i$ , które zależą od wyjść systemu.

## Metoda zmiennych instrumentalnych (Instrumental Variables)

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_{iN}^{IV} & B_{iN}^{IV} \end{pmatrix} = V_{iN} \Psi_{iN}^T (W_{iN} \Psi_{iN}^T)^{-1}}$$

**W1:** wymiarowość  $\Psi_{iN}$  jest identyczna jak wymiarowość macierzy  $W_{iN}$ :

$$\Psi_{iN} = [\psi_i^1, \dots, \psi_i^N] \quad \psi_i^k = (\psi_{i,1}^{kT}, \psi_{i,2}^{kT})^T$$

gdzie

$$\dim \psi_{i,1} = \dim u_i$$

$$\dim \psi_{i,2} = \dim c_i$$

**W2:** macierz  $W_{iN} \Psi_{iN}^T$  jest odwracalna (nieosobliwa);

**W3:** elementy  $\psi_{i,1}^1, \dots, \psi_{i,1}^N$  i  $\psi_{i,2}^1, \dots, \psi_{i,2}^N$  macierzy  $\Psi_{iN}$  są asymptotycznie silnie *skorelowane* z wejściami zewnętrznymi  $c^1, \dots, c^N$ ;

**W4:** elementy  $\psi_{i,1}^1, \dots, \psi_{i,1}^N$  i  $\psi_{i,2}^1, \dots, \psi_{i,2}^N$  macierzy  $\Psi_{iN}$  są asymptotycznie *nieskorelowane* z zakłóceniami  $\theta^1, \dots, \theta^N$  działającymi na wyjścia podsystemów.

### Konstrukcja zmiennych pomocniczych

Oznaczmy przez  $L_i$  macierz formującą  $\Psi_{iN}$  z macierzy pobudzeń zewnętrznych systemu  $E_N$

$$\Psi_{iN} = L_i E_N$$

Postulat (względem na warunki W3 i W4 oraz niedostępność pomiarową wektora  $\theta$ )

$$L_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i & 0 \\ I_i & 0 \end{bmatrix}$$

$\Gamma_i$  jest macierzą o wymiarze  $\dim u_i \times \dim c$ , o której zakładamy, że jest pełnego rzędu

$I_i$  jest macierzą blokową o wymiarach  $\dim c_i \times \dim c$ , z jednostkowym  $i$ -tym blokiem kolumnowym:

$$I_i = [0, \dots, 0, I, 0, \dots, 0]$$

### Własności asymptotyczne (przypadek braku zakłóceń pomiarowych)

$$V_{iN} = (A_i, B_i)W_{iN} + \Theta_{iN} \quad / \cdot \Psi_{iN}^T$$

błąd estymacji

$$(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}) - (A_i, B_i) = \Theta_{iN} \Psi_{iN}^T (W_{iN} \Psi_{iN}^T)^{-1} \quad \Delta_N = 1/N \Theta_{iN} \Psi_{iN}^T (1/N W_{iN} \Psi_{iN}^T)^{-1}$$

zapiszmy

$$W_{iN} = F_i E_N \quad , \text{gdzie} \quad F_i = \begin{bmatrix} H_i K & H_i G \\ I_i & 0 \end{bmatrix}$$

na podstawie warunków W1÷W4 oraz mocnego prawa wielkich liczb otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1/N \Theta_{iN} \Psi_{iN}^T - p.1 &\rightarrow [0 \quad : \quad 0] \\ 1/N W_{iN} \Psi_{iN}^T - p.1 &\rightarrow \begin{bmatrix} \Sigma_{\tilde{u}, \psi_1}^i & \Sigma_{\tilde{u}, c}^i \\ \Sigma_{c, \psi_2}^i & \Sigma_{c, c}^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie  $\Sigma_{x,y}^i$  oznacza macierz korelacji wzajemnej pomiędzy wektorami losowymi  $x_i$  i  $y_i$

### Wniosek

$$(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}) - p.1 \rightarrow (A_i, B_i)$$

## Optymalna generacja zmiennych instrumentalnych

$$\|E\{\Delta_N^T \Delta_N\}\|_2 \rightarrow \min$$

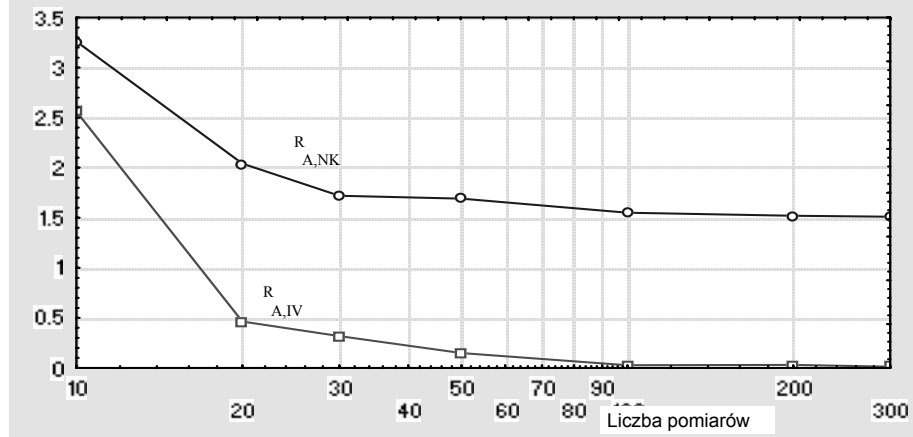
$$\begin{aligned} \psi_{i,1}^{k*} &= E(u_i^k | c = c^k) = H_i K c^k \\ \psi_{i,2}^{k*} &= c_i^k \end{aligned} \quad k=1..N \quad (9)$$

Uwaga: macierz  $K$  jest nieznana



## Wyniki eksperymentów

Porównanie błędów estymacji metodami NK i IV dla elementów macierzy A.



Zależność średniego błędu identyfikacji od wyboru zmiennych instrumentalnych.

