#07

Sterowanie dyskretne procesami ciągłymi

1. Impulsator

jeżeli wejściem impulsatora jest $u(t)$ to jego wyjściem jest

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT)$$

$u^*(t)$ jest ciągiem modulowanych impulsów Diraca: $u(0)\delta(t)$, $u(T)\delta(t-T)$, $u(2T)\delta(t-2T)$,...

2. Ekstrapolator

jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca $u^*(t)$, a wyjściem – funkcja $\overline{u}(t)$ odcinkami stała

$$\overline{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T)$$

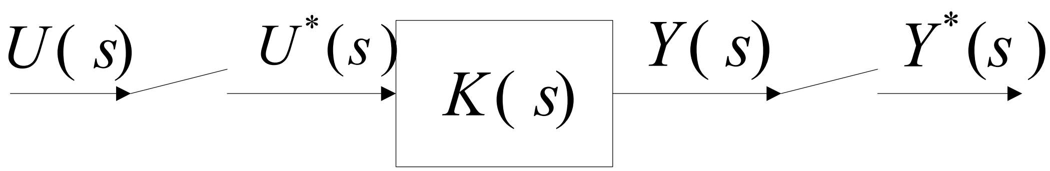
$$\overline{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left[1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)\right]$$

$$\overline{U}(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left[e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT}\right] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nsT}$$

a ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nsT} = U^*(s)$, to

$$\overline{U}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}U^*(s)$$

3. Obiekt ciągły z 2 impulsatorami synchronicznymi



$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$

Oznaczmy

$$u_n = u(nT) \qquad\qquad y_n = y(nT)$$

Wyznaczamy transmitancję systemu (dyskretnego), który przekształca ciąg $\{u_n\}$ w ciąg $\{y_n\}$.

$$\begin{aligned} Y(s) &= K(s)U^*(s) \\ y(t) &= \int_0^t k(t-\tau)u^*(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} u(iT) \int_0^{nT} k(nT - \tau)\delta(\tau - iT)d\tau = \sum_{i=0}^{n} k\left((n-i)T\right) u(iT)$$

System dyskretny ma zatem odpowiedź impulsową

$$k_n = k(nT)$$

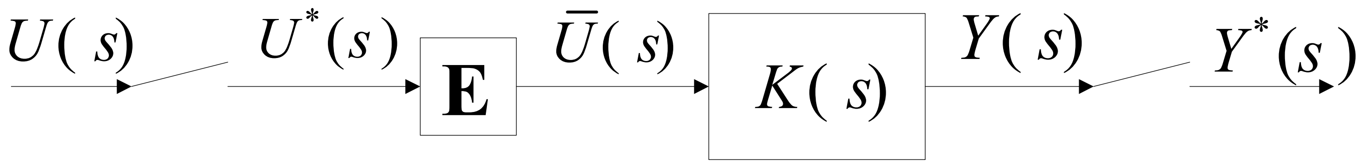
i odpowiednio transmitancję dyskretną

$$\widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{k(nT)\right\}$$

Schemat postępowania

$$K(s) \to k(t) \to k(nT) \to \mathcal{Z}\left\{k(nT)\right\} = \widehat{K}(z)$$

4. Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem



$$Y(s) = K(s)\overline{U}(s) = H(s)U^*(s), \qquad \text{gdzie } H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}K(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)e^{-sT}\right\} = \lambda(t) - \lambda(t-T)$$

po zastosowaniu reguły o splocie można pokazać, że

$$y_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\lambda_{n-i} - \lambda_{n-1-i}\right)u_i$$

system dyskretny ma zatem transmitancję

$$\overline{K}(z) = \mathcal{Z}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \mathcal{Z}(\lambda_n) - z^{-1}\mathcal{Z}(\lambda_n) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\lambda(nT)\right\}$$

Schemat postępowania

$$\frac{1}{s}K(s) \rightarrow \lambda(t) \rightarrow \lambda(nT) \rightarrow \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\lambda(nT)\right\} = \overline{K}(z)$$

5. Przykłady

$$K(s) = c \rightarrow k(t) = c\delta(t) \rightarrow k(nT) = c\delta(nT) \rightarrow \widehat{K}(z) = c\mathcal{Z}\left\{\delta(nT)\right\} = c$$
$$\rightarrow \lambda(t) = c\mathbf{1}(t) \rightarrow \lambda(nT) = c \rightarrow \overline{K}(z) = \tfrac{z-1}{z}c\mathcal{Z}\left\{1_n\right\} = c\tfrac{z-1}{z}\tfrac{z}{z-1} = c$$

UWAGA BŁĄD!!!
W tym miejscu zamiast -nT
powinno być exp(-nT)
itd.

Przepraszam,
G. Mzyk

$$K(s) = \tfrac{1}{s} \rightarrow k(t) = \mathbf{1}(t) \rightarrow k(nT) = \mathbf{1}_n \rightarrow \widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}_n\right\} = \tfrac{z}{z-1}$$
$$\rightarrow \lambda(t) = t \rightarrow \lambda(nT) = nT \rightarrow \overline{K}(z) = \tfrac{z-1}{z}T\mathcal{Z}\left\{n\right\} = \tfrac{z-1}{z}T\tfrac{z}{(z-1)^2} = \tfrac{T}{z-1}$$

$$K(s) = \tfrac{1}{s+1} \rightarrow k(t) = e^{-t} \rightarrow k(nT) = e^{-nT} \rightarrow \widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{e^{-nT}\right\} = \tfrac{z}{z-e^{-T}}$$
$$\rightarrow \lambda(t) = 1 - e^{-t} \rightarrow \lambda(nT) = \mathbf{1}_n - nT \rightarrow \cancel{\overline{K}(z) = \tfrac{z-1}{z}T\mathcal{Z}\{\mathbf{1}_n - nT\} = \tfrac{z-1}{z}\left(\tfrac{z}{z-1} - \tfrac{Tz}{(z-1)^2}\right) =}$$
$$\cancel{\tfrac{z-1}{z}\tfrac{z(z-1)-Tz}{(z-1)^2} = \tfrac{(z-1)-T}{(z-1)}}$$