Sterowanie optymalne

Sterowanie Procesami Ciągłymi

2017

Optymalizacja statyczna funkcji

Funkcja celu/kryterialna/kosztów

$$
\begin{aligned}
Q(x) &\rightarrow \min_x \\
x^* &= \arg\min_x Q(x)
\end{aligned}
$$

Ograniczenie

$$x \in X, \qquad \text{gdzie } X \text{ – zbiór rozwiązań dopuszczalnych}$$

Cel

Znaleźć takie $x^* \in X$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$Q(x^*) \leq Q(x)$$

Pojęcie funkcjonału

uogólnienie pojęcia funkcji
mapowanie przypisujące funkcji $x(t)$ liczbę Q

$$x(t) \longrightarrow Q$$

Przykłady

$$Q = \max_{t \in R} |x(t)|, \qquad Q = \int_a^b x^2(t)dt$$

Optymalizacja dynamiczna

Chodzi o znalezienie takiej funkcji $x^*(t)$ ze zbioru dopuszczalnego X, że dla każdej funkcji $x(t) \in X$ zachodzi

$$Q\left\{x^*(t)\right\} \leq Q\left\{x(t)\right\}$$

Sformułowanie problemu

Zadanie sterowania optymalnego obiektem nieliniowym

$$x'(t) = f\left(x(t), u(t), t\right), \qquad t \in [t_0, t_k]$$

zminimalizować wskaźnik jakości (koszt sterowania)

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_k} g\left(x(t), u(t), t\right) dt, \qquad g\left(x(t), u(t), t\right) \text{ – koszt chwilowy}$$

przy danym stanie początkowym x_0 i końcowym x_k, tj

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{i} \qquad x(t_k) = x_k$$

i ograniczeń nałożonych na proces sterujący

$$u(t) \in U, \qquad U \text{ – zbiór sterowań dopuszczalnych}$$

Problem jest nieskończenie wymiarowy !!!

Przykładowe kryteria

- sterowanie minimalnoczasowe

$$
\begin{aligned}
g\left(x(t), u(t), t\right) &= 1 \\
G\left(x, u\right) &= \int_{t_0}^{t_k} 1 dt = t_k - t_0
\end{aligned}
$$

- sterowanie minimalnoenergetyczne

$$
\begin{aligned}
g\left(x(t), u(t), t\right) &= u^2(t) \\
G\left(x, u\right) &= \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt
\end{aligned}
$$

- całka z kwadratu stanu i sterowania

$$
G\left(x, u\right) = \int_{t_0}^{t_k} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt
$$

- problem ze swobodnym stanem końcowym

$$
G = F(x(t_k))
$$

Rachunek wariacyjny

Minimum lokalne funkcji (przypomnienie)

Funkcja $Q(x)$ ma w punkcie x^* minimum lokalne jeśli istnieje takie $\varepsilon > 0$ (dowolnie małe *otoczenie*), że

$$\|x - x^*\| < \varepsilon \Longrightarrow Q(x) \geq Q(x^*)$$

Jeśli funkcja $Q(x)$ jest różniczkowalna to

$$Q'(x^*) = 0.$$

Wnioskowanie w drugą stronę jest nieprawdziwe !!!

Rachunek wariacyjny

Pojęcie otoczenia w przestrzeni krzywych

Zdefiniujmy normę funkcji

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [t_0, t_k]} |x(t)| + \max_{t \in [t_0, t_k]} \left|x'(t)\right|$$

Funkcjonał $Q\{x(t)\}$ osiąga lokalne minimum na krzywej $x^*(t)$ jeśli istnieje takie $\varepsilon > 0$ (otoczenie w przestrzeni krzywych), że

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \Longrightarrow Q\{x(t)\} \geq Q\{x^*(t)\}$$

Rachunek wariacyjny

Równanie Eulera-Lagrange'a

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right) \quad \rightarrow \quad u(t) = F\left(x(t), x'(t), t\right) \\ g\left(x(t), u(t), t\right) &= g\left(x(t), \underbrace{F\left(x(t), x'(t), t\right)}, t\right) \triangleq \widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right) \end{aligned}$$

Jeżeli funkcjonał (funkcja kosztów) $G\left\{x(t)\right\} = \int_{t_0}^{t_k} \widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right) dt$ ma minimum lokalne na krzywej $x^*(t)$, to spełnione jest na niej równanie *Eulera-Lagrange'a*

$$\widetilde{g}_x(t) = \frac{d}{dt}\widetilde{g}_{x'}(t), \text{ dla } t \in [t_0, t_k]$$

gdzie

$$\widetilde{g}_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right) \quad \text{i} \quad \widetilde{g}_{x'}(t) = \frac{\partial}{\partial x'}\widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right)$$

Jest to warunek konieczny, niewystarczający !!!

Mnożniki Lagrange'a

Jeżeli funkcja $f(x) : R^n \to R$ (tzn. x jest wielowymiarowe) ma ekstremum warunkowe w punkcie x^*, przy warunku $G(x) = 0$, gdzie $G(x) : R^n \to R^m$, to w punkcie $x = x^*$ spełoniny jest układ równań

$$\begin{cases} f'(x) = \Lambda \circ G'(x) \\ G(x) = 0 \end{cases}$$

gdzie

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^T$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – tzw. mnożniki Lagrangea

Mnożniki Lagrange'a

Metoda mnożników Lagrange'a – technika pozwalająca na sprowadzenie zadania optymalizacji z ograniczeniami do zadania bez ograniczeń

Przykład. Zminimalizować funkcję

$$f(x, y) = x + y$$

przy ograniczeniu, że punkt (x, y) leży na okręgu jednostkowym, tj.

$$x^2 + y^2 = 1,$$

czyli

$$G(x, y) = 0, \qquad \text{gdzie } G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Mnożniki Lagrange'a

Tworzy się funkcję

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda G(x,y)$$

Można pokazać, że warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie (x,y) jest

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

Mnożniki Lagrange'a

W naszym przykładzie

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

co prowadzi do rozwiązania $x = y$, $2x^2 = 1$, a zatem

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{lub } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Można zastosować tw. Weierstrassa, bo okrąg jest zwarty (domknięty i ograniczony)

Zasada maksimum Pontryagina, funkcja Hamiltona

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right), \qquad t \in [t_0, t_k] \\
G\left(x, u\right) &= \int_{t_0}^{t_k} g\left(x(t), u(t), t\right) dt
\end{aligned}
$$

Funkcja Hamiltona (hamiltonian)

$$H\left(\lambda(t), x(t), u(t), t\right) \triangleq -g\left(x(t), u(t), t\right) + \left\langle \lambda(t), f\left(x(t), u(t), t\right)\right\rangle$$

gdzie

$$\left\langle \lambda(t), f\left(x(t), u(t), t\right)\right\rangle = \lambda^T(t) f\left(x(t), u(t), t\right)$$

Zasada maksimum Pontryagina, warunek konieczny optymalności

Jeżeli (x^*, u^*) jest optymalnym procesem sterowania, to sterowanie u^* maksymalizuje hamiltonian problemu tj.

$$H\left(\lambda^*(t), x^*(t), u^*(t), t\right) = \max_{u \in U} H\left(\lambda^*(t), x^*(t), u(t), t\right)$$

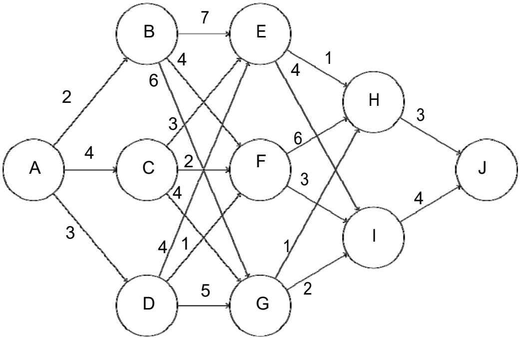
gdzie $\lambda^*(t)$ (tzw. funkcja sprzężona) spełnia liniowe równanie różniczkowe (tzw. sprzężone)

$$\lambda'^*(t) = -f_x^T\left(x^*(t), u^*(t), t\right) + g_x^T\left(x^*(t), u^*(t), t\right)$$

z warunkiem końcowym

$$\lambda^*(t_k) = 0.$$

Zasada Bellmana



Poszukiwanie trajektorii optymalnej

Zasada Bellmana

Jeżeli optymalną trajektorią z punktu A do punktu D jest trajektoria

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D,$$

to optymalną trajektorią z punktu B do punktu D jest trajektoria

$$B \longrightarrow C \longrightarrow D.$$

(*tzn. końcówka trajektorii optymalnej jest optymalna sama w sobie, strategia optymalna nie zależy od historii procesu*)
Dowód - nie wprost, oczywisty.

Zasada Bellmana

Funkcja Bellmana

$$
\begin{aligned}
S\left(x(t), t\right) &\triangleq \min_{t \in U[t, t_k]} \int_t^{t_k} g\left(x(\tau), u(\tau), \tau\right) d\tau, \\
\text{przy warunku } x(t_k) &= x_k
\end{aligned}
$$

Funkcja $S\left(x(t), t\right)$ określa jaki jest najmniejszy możliwy koszt dotarcia do stanu końcowego x_k w chwili t_k, jeżeli w chwili t obiekt znajduje się w stanie $x(t)$.

Zasada Bellmana

Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana HJB

$$S\left(x(t), t\right) \triangleq \min_{t \in U[t, t_k]} \left(\int_t^{t+\Delta t} g\left(x(\tau), u(\tau), \tau\right) d\tau + S\left(x(t+\Delta t), t + \Delta\right.\right.$$

po rozwinięciu funkcji $S\left(x(t+\Delta t), t+\Delta t\right)$ w szereg Taylora względem punktu $S\left(x(t), t\right)$ i przejściu $\Delta t \to 0$ otrzymuje się równianie *Hamiltona-Jacobiego-Bellmana*

$$-S_t\left(x(t), t\right) = \min_{u(t) \in U} \left(g(x(t), u(t), t) + S_x\left(x(t), t\right) f\left(x(t), u(t), t\right)\right)$$

gdzie

$$S_t\left(x(t), t\right) = \frac{\partial}{\partial t} S\left(x(t), t\right) \quad \text{i} \quad S_x\left(x(t), t\right) = \frac{\partial}{\partial x} S\left(x(t), t\right)$$

Zasada Bellmana

Programowanie dynamiczne (metoda postępowania)

1. Minimalizujemy prawą stronę równania HJB traktując x, $S_x(x,t)$ i t jako parametry, uzyskujemy
$$u\left(x, S_x(x,t), t\right).$$
2. Wstawiamy $u\left(x, S_x(x,t), t\right)$ do równania HJB.
3. Rozwiązujemy je przy warunku granicznym
$$S\left(x, t_k\right) = 0.$$

Regulator liniowo kwadratowy (LQR)

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

kwadratowa funkcja kosztów

$$G = \underbrace{x^T(t_k)F(t_k)x(t_k)}_{\text{koszt stanu końcowego}} + \int_{t_0}^{t_k} \left(x^T Qx + u^T Ru\right) dt$$

LQR – optymalne sterowanie

Zastosować sprzężenie zwrotne od stanu

$$u(t) = -Kx(t),$$

gdzie

$$K = R^{-1}B^T P(t),$$

zaś $P(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego *Riccatiego*

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -P'(t),$$

z warunkiem brzegowym

$$P(t_k) = F(t_k).$$

- rozwiązanie wyznaczone analitycznie
- układ odporny na zakłócenia

Źródła

- R. Bellman, *Adaptacyjne procesy sterowania*, PWN, Warszawa, 1965
- H. Górecki, *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.
- J. Zabczyk, *Zarys matematycznej teorii sterowania*,PWN,Warszawa 1991.
- http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/krystyn.styczen/
- http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=tst
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Regulator_liniowo-kwadratowy
- http://student.agh.edu.pl/~ptibbets/wyklady_pdf/