#01
Opis układów wielowymiarowych za pomocą macierzy transmitancji
#02
Opis dynamiki układu metodą zmiennych stanu

Metody opisu liniowego układu dynamicznego z czasem ciągłym

- liniowe **równanie różniczkowe** rzędu m, (zakładamy że: $a_m \neq 0$, $l \leqslant m$, dodatkowo $u(t) = 0$ dla $t < 0$)

$$a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_l \frac{d^l u(t)}{dt^l} + b_{l-1} \frac{d^{l-1} u(t)}{dt^{l-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

z warunkiem początkowym (razem m liczb)

$$y(0-), \qquad \frac{dy(t)}{dt}/_{t=(0-)}, \qquad \cdots \qquad , \qquad \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}/_{t=(0-)}$$

Przykład równania rzędu $m = 1$ i odp. warunku początkowego

$$3y'(t) + 2y(t) = 7u(t), \qquad y(0-) = 10$$

- charakterystyka impulsowa $k(t)$ (tzw. **odpowiedź impulsowa**), czyli postać $y(t)$ przy $u(t) = \delta(t)$ i zerowym WP
Przykład odpowiedzi skokowej

$$k(t) = e^{-t}$$

Uwaga. Gdy WP rzeczywiście jest zerowy, wtedy sygnał wyjściowy jest splotem wejścia i charakterystyki impulsowej

$$y(t) = u(t) * k(t) = \int_0^\infty u(t-\tau)k(\tau)d\tau$$

Gdy tak nie jest, dochodzi składowa zależna od WP.

- charakterystyka skokowa $\lambda(t)$ (tzw. **odpowiedź skokowa**), czyli postać $y(t)$ przy $u(t) = \mathbf{1}(t)$ i zerowym WP
Przykład odpowiedzi skokowej

$$\lambda(t) = 3t$$

- **transmitancja**

$$K(s) = \mathcal{L}\{k(t)\} = \int_0^\infty k(t)e^{-st}dt = \frac{b_l s^l + ... + b_1 s + b_0}{a_m s^m + ... + a_1 s + a_0}$$

Uwaga. Gdy warunek początkowy jest zerowy, wtedy $Y(s) = K(s)U(s)$ (tylko wtedy!!!).

- **równanie stanu**

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$u(t)$, $y(t)$ – wejscie i wyjście obiektu (skalarne)
$\mathbf{x}(t)$ – wektor stanu (kolumna, k elementów zmieniających się w czasie)
$\mathbf{A}$ – macierz parametrów, kwadratowa $k \times k$

$\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – wektory parametrów (kolumny k-elementowe)

Uwaga. $K(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$

Układy wielowymiarowe (MIMO)

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \ldots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_q(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$\mathbf{A}$ – macierz o wymiarach $r \times r$

$\mathbf{B}$ – macierz o wymiarach $r \times p$

$\mathbf{C}$ – macierz o wymiarach $q \times r$

Macierz transmitancji

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$\mathbf{K}(s)$ – macierz o wymiarach $q \times p$

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(s) & K_{1,2}(s) & ... & K_{1,p}(s) \\ K_{2,1}(s) & K_{2,2}(s) & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{q,1}(s) & ... & ... & K_{q,p}(s) \end{bmatrix}.$$

Przy zerowych WP

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s); \qquad Y_i(s) = \sum_{j=1}^{p} K_{i,j}(s)U_j(s); \qquad i = 1, 2, ..., q,$$

gdzie

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ ... \\ U_p(s) \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ ... \\ Y_q(s) \end{bmatrix}$$

$K_{i,j}(s)$ – transmitancja, określającą wpływ j-tego wejścia układu na i-te wyjście