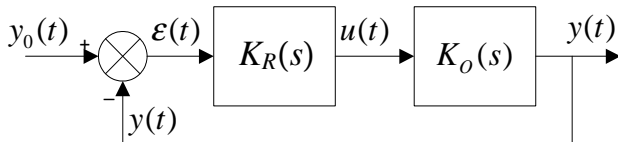


# Układy z regulatorami P, PI oraz PID

Sterowanie Procesami Ciągłymi

2016

# Układ automatycznej regulacji



$$y_0(t) = \mathbf{1}(t)$$

# Postulaty, kryteria oceny jakości regulacji

- stabilność
- wartość uchybu w stanie ustalonym

$$\varepsilon_{ust} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

- czas regulacji – czas po którym zagwarantowane jest zredukowanie uchybu do 5% wartości początkowej

$$t_r : |\varepsilon(t) - \varepsilon_{ust}| \leq \delta, t \geq t_r, \delta = 5\% |\varepsilon(0) - \varepsilon_{ust}|,$$

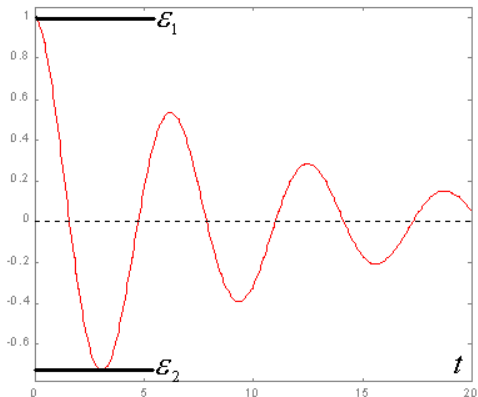
- całka kwadratu uchybu

$$Q = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$

# Postulaty, kryteria oceny jakości regulacji

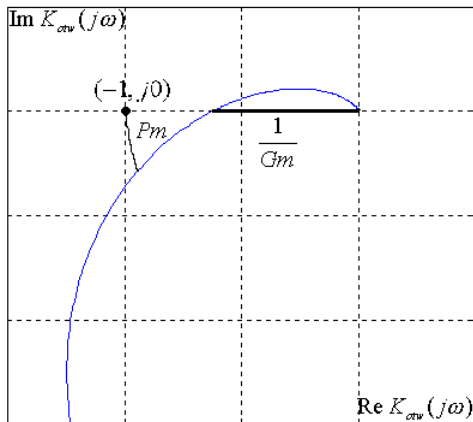
- przeregulowanie

$$\varkappa = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| \cdot 100\%$$



# Postulaty, kryteria oceny jakości regulacji

- szybkość regulacji – rząd (numer) pierwszej niezerowej pochodnej  $\lambda_{UAR}(t)$  na starcie, tzn. dla  $t = 0$
- zapas amplitudy i zapas fazy



# Regulacja typu P

Uchyb w stanie ustalonym

$$K_R(s) = k_p$$

$$K_{otw}(s) = k_p K_O(s) = k_p \frac{L_O(s)}{M_O(s)} \quad K_E(s) = \frac{1}{1 + K_{otw}(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} K_E(s)$$

$$\varepsilon_{ust} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + k_p K_0(0)} \neq 0$$

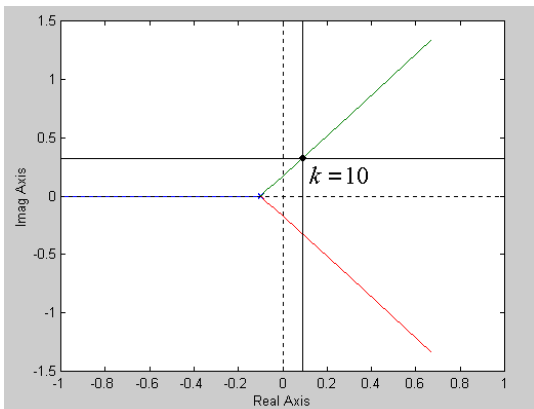
$$\text{np. } K_O(s) = \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ust} = \frac{1}{1 + k_p}$$

# Regulacja typu P

Oscylacje, kwestia stabilności, linie pierwiastkowe

Przykład

$$K_O(s) = \frac{1}{(s+1)^3}, \quad K_{Otw}(s) = \frac{k_p}{(s+1)^3}, \quad K_{UAR}(s) = \frac{k_p}{(s+1)^3 + k_p}$$



# Regulacja typu P

## Szybkość regulacji

$$K_0(s) = \frac{b_1 s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0} \quad p = m - l \geq 0$$

$$K_{otw}(s) = k_p \frac{b_1 s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0}$$

$$K_{UAR}(s) = \frac{k_p (b_1 s^l + \dots + b_0)}{a_m s^m + \dots + a_0 + k_p (b_1 s^l + \dots + b_0)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{UAR}^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \dots, p-1$$

$$\neq 0, \text{ dla } i = p$$

### Przykłady

$$K_O(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \lambda_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda'_{UAR}(0) \neq 0$$

$$K_O(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow \lambda_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda'_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda''_{UAR}(0) \neq 0$$



# Regulacja typu I

Uchyb w stanie ustalonym

$$K_R(s) = \frac{k_i}{s}$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_i}{s} K_O(s) = \frac{k_i}{s} \frac{L_O(s)}{M_O(s)}$$

$$K_E(s) = \frac{1}{1 + K_{otw}(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} K_E(s)$$

$$\varepsilon_{ust} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + \frac{k_i}{s} K_O(0)} = 0$$

# Regulacja typu I

Szybkość regulacji

$$K_0(s) = \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0} \quad p = m - l \geq 0$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_i}{s} \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0}$$

$$K_{UAR}(s) = \frac{k_i (b_l s^l + \dots + b_0)}{s (a_m s^m + \dots + a_0) + k_i (b_l s^l + \dots + b_0)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{UAR}^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \dots, p$$

$$\neq 0, \text{ dla } i = p + 1$$

Przykład

$$K_O(s) = \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow \quad \lambda_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda'_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda''_{UAR}(0) \neq 0$$

# Regulacja typu I

Przykład. Analityczna analiza wpływu wartości nastawy na kryterium całkowe

$$K_O(s) = \frac{a}{s+b}, \quad a, b > 0 \quad K_R(s) = \frac{k_i}{s}$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_i a}{s(s+b)} \quad K_E(s) = \frac{1}{1 + K_{otw}(s)} = \frac{(s+b)s}{s^2 + bs + k_i a}$$

$$E(s) = \frac{s+b}{s^2 + bs + k_i a}$$

$$Q(k_i) = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \frac{k_i a + b^2}{2k_i ab}$$

$$\frac{\partial Q(k_i)}{\partial k_i} = \frac{2k_i a^2 b - 2ab(k_i a + b^2)}{(2k_i ab)^2} = \frac{-2ab^3}{(2k_i ab)^2} \quad k_i \nearrow$$

# Regulacja typu PI

Uchyb w stanie ustalonym

$$K_R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} K_O(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{L_O(s)}{M_O(s)}$$

$$K_E(s) = \frac{1}{1 + K_{otw}(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} K_E(s)$$

$$\varepsilon_{ust} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{s}{s + (k_p s + k_i) K_O(0)} = 0$$

# Regulacja typu PI

Szybkość regulacji

$$K_0(s) = \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0} \quad p = m - l \geq 0$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0}$$

$$K_{UAR}(s) = \frac{(k_p s + k_i) (b_l s^l + \dots + b_0)}{s (a_m s^m + \dots + a_0) + (k_p s + k_i) (b_l s^l + \dots + b_0)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{UAR}^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \dots, p-1$$

$$\neq 0, \text{ dla } i = p$$

# Regulacja typu PID

## Szybkość regulacji

$$K_R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0}$$

$$K_{UAR}(s) = \frac{(k_d s^2 + k_p s + k_i) (b_l s^l + \dots + b_0)}{s (a_m s^m + \dots + a_0) + (k_d s^2 + k_p s + k_i) (b_l s^l + \dots + b_0)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{UAR}^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \dots, p-2$$

$$\neq 0, \text{ dla } i = p-1$$

# Podsumowanie

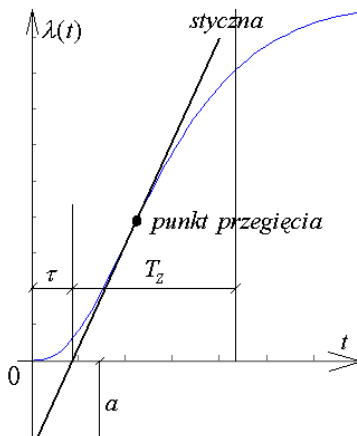
	$\varepsilon_{ust}$	...	$\lambda^{(p-1)}(0)$	$\lambda^{(p)}(0)$	$\lambda^{(p+1)}(0)$	
P	$\neq 0$		0	$\neq 0$		
I	0		0	0	$\neq 0$	
PI	0		0	$\neq 0$		
PID	0		$\neq 0$			

# Pierwsza metoda Zieglera-Nicolsa

Aproksymacja obiektu stabilnego

Uwaga! Nie znamy  $K_O(s)$ , dokonujemy aproksymacji

$$K_{approx}^{(1)}(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{T_Z s + 1}$$

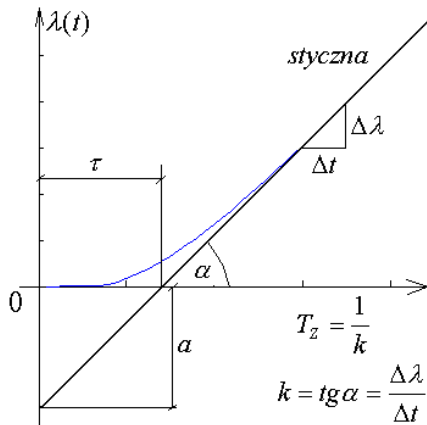




# Pierwsza metoda Zieglera-Nicolsa

Aproksymacja obiektu całkującego

$$K_{approx}^{(2)}(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{s}$$



# Pierwsza metoda Zieglera-Nicolsa

Rekomendowane ustawienia

Typ regulatora	$k_p$	$\frac{1}{k_i}$	$k_d$
P	$1/a$	–	–
PI	$0,9/a$	$3\tau$	–
PID	$1,2/a$	$2\tau$	$\tau/2$

Żuchowski A., *Metoda doboru nastaw regulatora PID uwzględniająca postulowany zapas stabilności modułu i fazy*,  
Pomiary Automatyka Kontrola, str. 11–13, Nr 1/2004.

## Druga metoda Zieglera-Nicolsa

Możliwa do zastosowania dla obiektów stabilnych wyższych rzędów

Nie trzeba aproksymować

Doprowadzamy UAR z regulatorem typu P do granicy stabilność  
(zwiększając  $k_p$ )

Typ regulatora	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5k_{P,kryt}$	$\infty$	0
PI	$0,45k_{P,kryt}$	$T_{osc}/1,2$	0
PID	$0,6k_{P,kryt}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/8$

# Metoda funkcji opisującej

Przybliżona analiza układów z elementami nieliniowymi

$$u(t) = A \sin \omega t$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \sin k\omega t + c_k \cos k\omega t),$$

pierwsze harmoniczne

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega t + c_1 \cos \omega t \approx y(t)$$

funkcja opisująca (transmitancja przybliżająca)

$$J(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1 + jc_1}{A}.$$

# Przykładowe elementy nieliniowe

Charakterystyka $f(x)$	Funkcja opisująca dla $x(t) = A \sin \omega t$
$\max \{kx, B\}$	$J(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{B}{Ak} + \frac{B}{Ak} \left( 1 - \left( \frac{B}{Ak} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$
$\begin{cases} B, & \text{dla } x \geq 0 \\ -B, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A}$
$\begin{cases} 0, & \text{dla }  x  < a \\ B, & \text{dla } x \geq a \\ -B, & \text{dla } x < -a \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A} \left( 1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

# Nadążność UAR

$$y_0(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_r t^r$$

$$K_{otw}(s) = \frac{L_{otw}(s)}{M_{otw}(s)} = \frac{L_{otw}(s)}{s^h N_{otw}(s)}, \quad h - \text{rzęd astatyizmu}$$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ , gdy  $h > r$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_{ust} \neq 0$ , gdy  $h = r$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$ , gdy  $h < r$

Kryteria  
oooo

P  
ooo

I  
ooo

PI  
oo

PID  
oo

Z-N  
oooo

Uzup  
ooo●oo

D-C  
oooooooooooooo

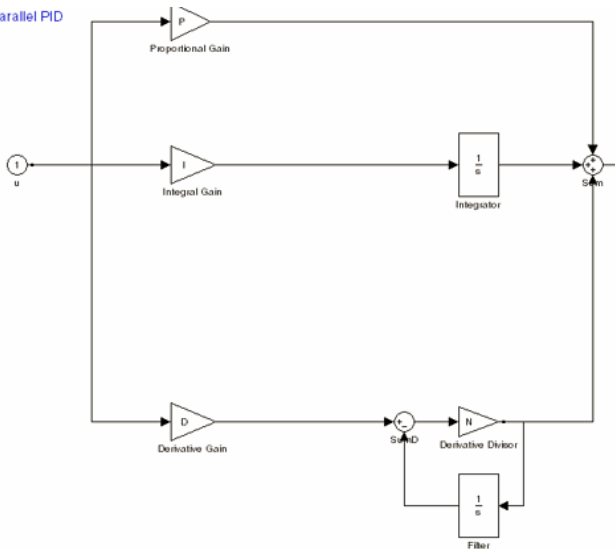
Adapt  
oooooooooooo

Ident  
oooooooo

# Regulacja dyskretna

# Realizacja regulatora PID w MATLAB

Parallel PID





# Realizacja regulatora PID w MATLAB

Uwaga!

$$K_{PID}^{par}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{Ns}{s + N} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{1}{\frac{1}{N}s + 1} s$$

$$K_{PID}^{ideal}(s) = k_p \left( 1 + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{Ns}{s + N} \right)$$

# Sterowanie dyskretne układem z czasem ciągłym

Ingerujemy w sterowanie jedynie w dyskretnych chwilach czasu

$$t = 0, T, 2T, 3T, \dots, nT, \dots$$

$$t = nT, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Okres dyskretyzacji (próbkowania)  $T$  jest z góry określony (znany)  
Nie mylić dyskretyzacji z kwantyzacją!!!

$$x(nT) \in R$$

Dwie koncepcje:

- sterowanie impulsowe: w chwilach  $0, T, 2T, \dots$  generujemy odpowiednio zmodulowane impulsy Diraca, a pomiędzy tymi chwilami sterowanie jest zerowe
- sterowanie odcinkami stałe: wartość sterowania  $u(nT)$  obowiązuje aż do chwili  $t = (n + 1)T$

# Impulsator

jeżeli wejściem impulsatora jest  $u(t)$  to jego wyjściem jest

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT)$$

$u^*(t)$  jest ciągiem modulowanych impulsów Diraca:  $u(0)\delta(t)$ ,  
 $u(T)\delta(t - T)$ ,  $u(2T)\delta(t - 2T)$ ,...

# Ekstrapolator

jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca  $u^*(t)$ , a wyjściem – funkcja  $\bar{u}(t)$  odcinkami stała

$$\bar{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T)$$

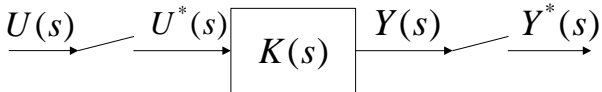
$$\bar{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) [1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)]$$

$$\bar{U}(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) [e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT}] = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nsT}$$

a ponieważ  $\sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nsT} = U^*(s)$ , to

$$\bar{U}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} U^*(s)$$

# Obiekt ciągły z dwoma impulsatorami synchronicznymi



$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$

Oznaczmy

$$u_n = u(nT)$$

$$y_n = y(nT)$$

Wyznaczamy transmitancję systemu (dyskretnego), który przekształca ciąg  $\{u_n\}$  w ciąg  $\{y_n\}$

$$Y(s) = K(s)U^*(s), \quad y(t) = \int_0^t k(t - \tau)u^*(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n u(iT) \int_0^{nT} k(nT - \tau)\delta(\tau - iT)d\tau = \sum_{i=0}^n k((n - i)T)u(iT)$$

# Obiekt ciągły z dwoma impulsatorami synchronicznymi

System dyskretny ma zatem odpowiedź impulsową

$$k_n = k(nT)$$

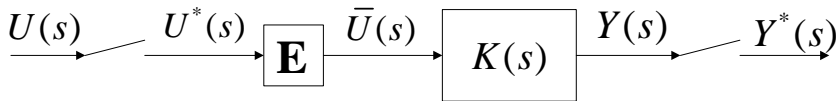
i odpowiednio transmitancję dyskretną

$$\hat{K}(z) = \mathcal{Z} \{k(nT)\}$$

Schemat postępowania

$$K(s) \rightarrow k(t) \rightarrow k(nT) \rightarrow \mathcal{Z} \{k(nT)\} = \hat{K}(z)$$

# Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem



$$Y(s) = K(s)\bar{U}(s) = H(s)U^*(s), \quad \text{gdzie } H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} K(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)e^{-sT}\right\} = \lambda(t) - \lambda(t - T)$$

po zastosowaniu reguły o splocie można pokazać, że

$$y_n = \sum_{i=0}^n (\lambda_{n-i} - \lambda_{n-1-i}) u_i$$

# Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem

Odpowiadający system dyskretny ma zatem transmitancję

$$\bar{K}(z) = \mathcal{Z}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \mathcal{Z}(\lambda_n) - z^{-1}\mathcal{Z}(\lambda_n) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{\lambda(nT)\}$$

Schemat postępowania

$$\frac{1}{s}K(s) \rightarrow \lambda(t) \rightarrow \lambda(nT) \rightarrow \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{\lambda(nT)\} = \bar{K}(z)$$



# Przykład

## Wzmacniacz

$$K(s) = c$$

$$k(t) = c\delta(t) \rightarrow k(nT) = c\delta(nT)$$

$$\hat{K}(z) = c\mathcal{Z}\{\delta(nT)\} = c$$

$$\lambda(t) = c\mathbf{1}(t) \rightarrow \lambda(nT) = c$$

$$\bar{K}(z) = \frac{z-1}{z} c\mathcal{Z}\{1_n\} = c \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} = c$$

# Przykład

## Element całkujący

$$K(s) = \frac{1}{s}$$

$$k(t) = \mathbf{1}(t) \rightarrow k(nT) = \mathbf{1}_n$$

$$\hat{K}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{1}_n\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\lambda(t) = t \rightarrow \lambda(nT) = nT$$

$$\bar{K}(z) = \frac{z-1}{z} T \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z-1}{z} T \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1}$$

# Przykład

## Obiekt inercyjny I-rzędu

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$k(t) = e^{-t} \rightarrow k(nT) = e^{-nT}$$

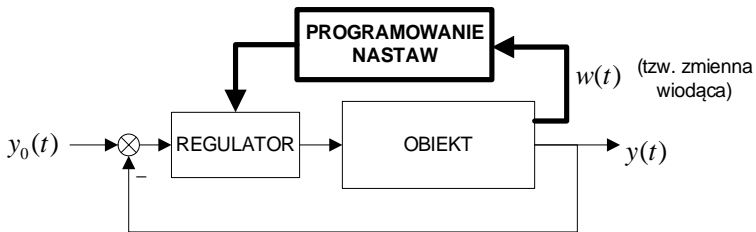
$$\hat{K}(z) = \mathcal{Z} \left\{ e^{-nT} \right\} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$\lambda(t) = 1 - e^{-t} \rightarrow \lambda(nT) = \mathbf{1}_n - (e^{-T})^n$$

$$\bar{K}(z) = \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

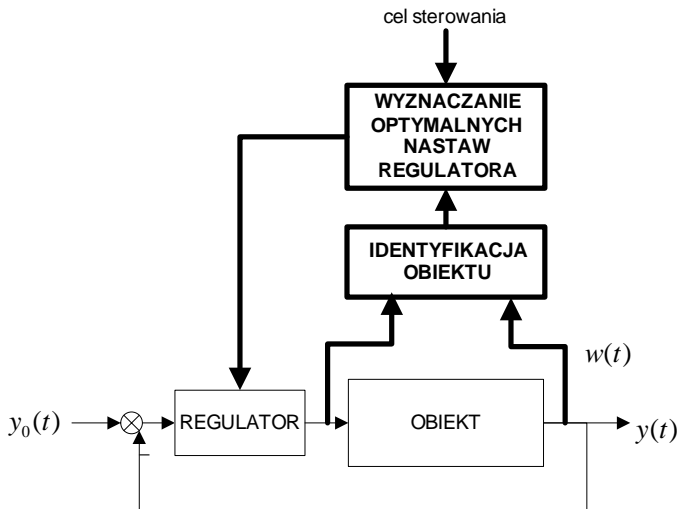
np. dla  $T = 1$  mamy  $\bar{K}(z) \approx \frac{0.632}{z-0.368}$

# Wstęp do regulacji predykcyjnej i adaptacyjnej



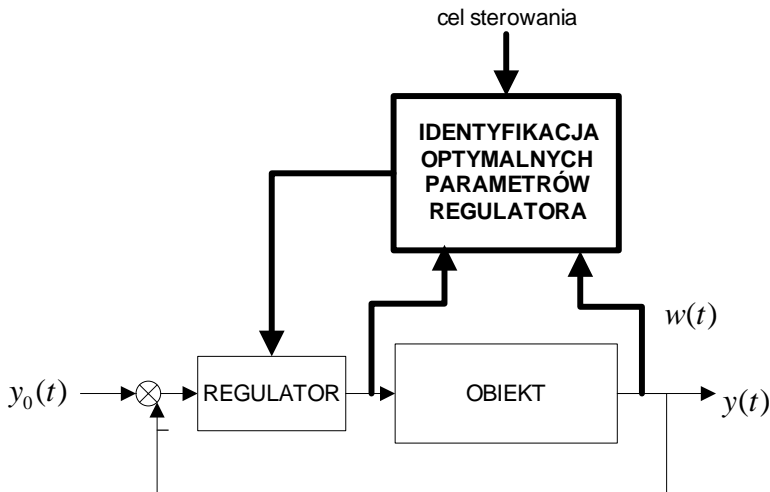
Adaptacja na podstawie zmiennej wiodącej

# Wstęp do regulacji predykcyjnej i adaptacyjnej



Pośrednia regulacja adaptacyjna

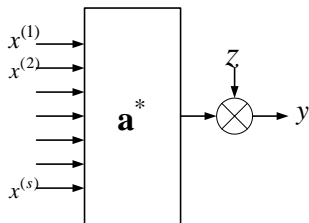
# Wstęp do regulacji predykcyjnej i adaptacyjnej



Bezpośrednia regulacja adaptacyjna

# Identyfikacja

## Liniowy obiekt statyczny (1)



$$\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

$\mathbf{E}z = 0$ ,  $\text{var}z < \infty$   
 $x^{(i)}$ ,  $z$  – niezależne

Figure: Liniowy obiekt statyczny typu *MISO*

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(s)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & \dots & x_N^{(s)} \end{bmatrix}$$

# Identyfikacja

## Liniowy obiekt statyczny (2)

$$\mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Równanie pomiarów

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N \mathbf{a}^* + \mathbf{Z}_N$$

Model

$$\bar{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) = \mathbf{X}_N \mathbf{a}$$

Istota metody najmniejszych kwadratów

$$\|\mathbf{Y}_N - \bar{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a})\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{a}}$$

Równania normalne

$$\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \mathbf{a} = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N$$

Warunek jednoznaczności rozwiązania

$$\text{rank} \mathbf{X}_N = s$$

Estymator NK

$$\hat{\mathbf{a}}_N = \left( \mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \right)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N^+ \mathbf{Y}_N$$

$$\hat{\mathbf{a}}_N \xrightarrow{p.1} \mathbf{a}^*, \text{ gdy } N \rightarrow \infty$$



# Identyfikacja

iniowy obiekt dynamiczny typu MA(s) (1)

L

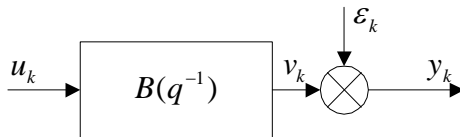


Figure: Model MA

$$v_k = b_0^* u_k + \dots + b_s^* u_{k-s}$$

$$y_k = v_k + \varepsilon_k$$

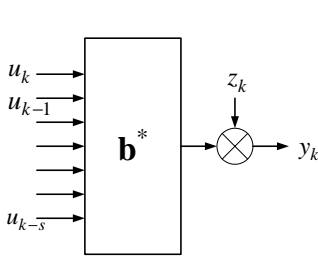
$$y_k = b_0^* u_k + \dots + b_s^* u_{k-s} + z_k$$

$$z_k = \varepsilon_k$$

# Identyfikacja

iniowy obiekt dynamiczny typu MA(s) (2)

L



$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

$$\mathbf{E}z = 0, \text{ var}z < \infty$$

$\{u_k\}, \{z_k\}$  – niezależne

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_0 & \dots & u_{1-s} \\ u_2 & u_1 & \dots & u_{2-s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & \dots & u_{N-s} \end{bmatrix}$$

# Identyfikacja

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (1)

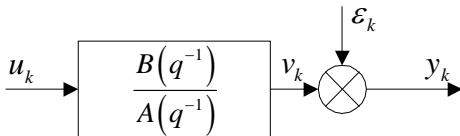


Figure: Model ARMA

$$v_k = b_0^* u_k + \dots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* v_{k-1} + \dots + a_p^* v_{k-p}$$

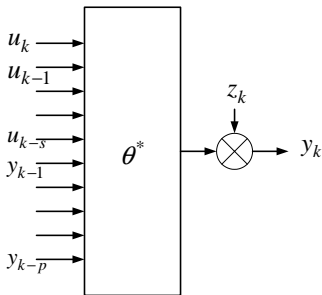
$$y_k = v_k + \varepsilon_k$$

$$y_k = b_0^* u_k + \dots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* y_{k-1} + \dots + a_p^* y_{k-p} + z_k$$

$$z_k = \varepsilon_k - a_1^* \varepsilon_{k-1} - \dots - a_p^* \varepsilon_{k-p}$$

# Identyfikacja

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (2)



$$\theta^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \\ a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_p^* \end{bmatrix}$$

Figure: Model ARMA

$$\mathbf{E}z = 0, \text{ var}z < \infty$$

$u_{k-i}, z_k$  – niezależne

$y_{k-i}, z_k$  – zależne, gdy  $\{z_k\}$   
jest procesem skorelowanym

# Identyfikacja

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (3)

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_0 & \cdots & u_{1-s} & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{1-p} \\ u_2 & u_1 & \cdots & u_{2-s} & y_1 & y_0 & \cdots & y_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-s} & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_N = \Phi_N \theta^* + \mathbf{Z}_N$$

$$\hat{\theta}_N = \left( \Phi_N^T \Phi_N \right)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N$$

# Wersja rekurencyjna

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + P_k \phi_k (y_k - \phi_k^T \hat{\theta}_{k-1}) \\ P_k &= P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \phi_k \phi_k^T P_{k-1}}{1 + \phi_k^T P_{k-1} \phi_k}\end{aligned}$$

wszystkie pomiary  $\{\phi_k, y_k\}$  mają takie same znaczenie (taką samą wagę)

a co jeśli prawdziwe szukane  $\theta^*$  zmienia się w czasie?

"stare" pomiary są mniej godne zaufania

# Śledzenie parametrów

$$y_k = \theta^* + z_k,$$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \alpha_k (y_k - \theta)^2, \quad (1)$$

$\alpha_k$  – wagi reprezentujące stopień ważności pomiaru  $y_k$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{k=1}^N \alpha_k (y_k - \theta)^2 = 2 \sum_{k=1}^N (\theta \alpha_k - y_k \alpha_k),$$

$$\theta \sum_{k=1}^N \alpha_k = \sum_{k=1}^N y_k \alpha_k$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \alpha_k}{\sum_{k=1}^N \alpha_k}, \quad (2)$$

gdym  $\alpha = \text{const}$  to  $\hat{\theta} = \frac{\alpha \sum_{k=1}^N y_k}{N\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k.$

# Wagi, przykłady

$$\alpha_k = \lambda^{N-k}, \text{ with } 0 < \lambda < 1 \quad (3)$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \alpha_k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{N-k} < \infty$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{as } N - n < k \leq N \\ 0, & \text{as } k \leq N - n \end{cases} .$$



# Strojenie

$$\hat{\theta}_n^{(N)} = \frac{1}{n} \sum_{k=N-n+1}^N y_k$$

w chwili  $N$ : skok parametru z wartości  $\theta^*$  na  $\theta^* + \Delta$   
 błąd średniokwadratowy horyzoncie  $H$

$$Q(n) = \sum_{i=N+1}^{N+H} \left( \text{var} \hat{\theta}_n^{(i)} + \text{bias}^2 \hat{\theta}_n^{(i)} \right),$$

$$Q(n) = \frac{H\sigma_z^2}{n} + \frac{\Delta^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{H\sigma_z^2}{n} + \frac{\Delta^2}{n^2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right)$$

$$\approx \frac{H\sigma_z^2}{n} + \frac{\Delta^2}{3} n,$$

$$n_{opt.} = \arg \min_n Q(n)$$

# Składniki kryterium jakości $Q(n)$

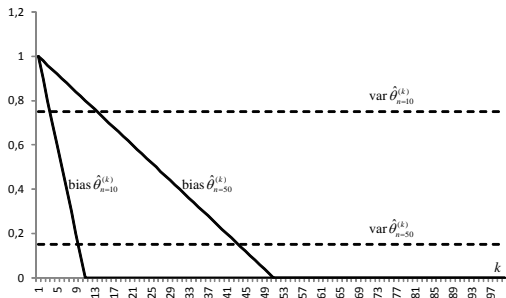


Figure:

# Sumaryczny błąd w funkcji $n$ (długości zapamiętywanej historii)

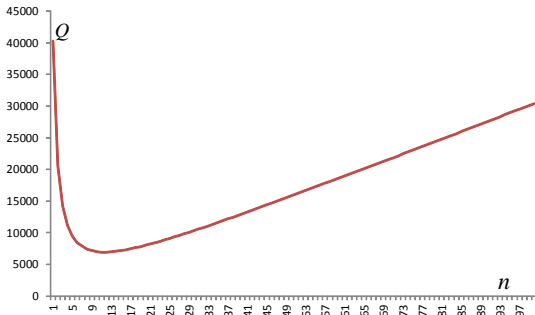


Figure:

# Ilustracja działania

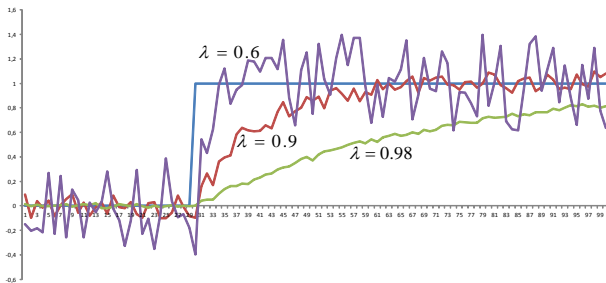


Figure: