

9.

Wersja rekurencyjna algorytmu najmniejszych kwadratów

wersja off-line (standardowa)

$$a_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N$$

wersja on-line (rekurencyjna)

$$a_N = f(a_{N-1}, x_N, y_N) = a_{N-1} + \delta(a_{N-1}, x_N, y_N)$$

odwracana macierz (w wersji off-line)

$$X_N^T X_N = \sum_{k=1}^N x_k x_k^T = \sum_{k=1}^{N-1} x_k x_k^T + x_N x_N^T = X_{N-1}^T X_{N-1} + x_N x_N^T$$

oznaczmy

$$P_N = (X_N^T X_N)^{-1}$$

$$\text{cov}(a_N) = P_N \sigma_z^2$$

możemy zapisać

$$\begin{aligned} a_N &= P_N X_N^T Y_N \\ a_{N-1} &= P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} \end{aligned}$$

$$P_N = (P_{N-1}^{-1} + x_N x_N^T)^{-1}, \text{ gdzie } P_{N-1}^{-1} = X_{N-1}^T X_{N-1}$$

**Lemat 1** (o odwracaniu macierzy)

$$(A + uu^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + u^T A^{-1} u} A^{-1} u u^T A^{-1}$$

Przyjmując  $A = P_{N-1}^{-1}$  i  $u = x_N$  otrzymujemy

$$P_N = P_{N-1} - \frac{1}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N} P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} = P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1}$$

$$\text{gdzie } \varkappa_N = \frac{1}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N}$$

$$\begin{aligned} a_N &= (P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1}) (X_{N-1}^T Y_{N-1} + x_N y_N) = \\ &= P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} + P_{N-1} x_N y_N - [\varkappa_N P_{N-1} x_N] (x_N^T P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N) = \\ &= a_{N-1} + [\varkappa_N P_{N-1} x_N] \left\{ \frac{1}{\varkappa_N} y_N - x_N^T a_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N \right\} \end{aligned}$$

wstawiając

$$\frac{1}{\varkappa_N} = 1 + x_N^T P_{N-1} x_N$$

otrzymujemy

$$\{\dots\} = y_N + x_N^T P_{N-1} x_N y_N - x_N^T a_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N = y_N - x_N^T a_{N-1}$$

wniosek

$$\begin{aligned} a_N &= a_{N-1} + \varkappa_N P_{N-1} x_N (y_N - x_N^T a_{N-1}) \\ P_N &= P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} \quad / \cdot x_N \end{aligned} \tag{1}$$

$$P_N x_N = P_{N-1} x_N - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} x_N = \varkappa_N P_{N-1} x_N \left\{ \frac{1}{\varkappa_N} - x_N^T P_{N-1} x_N \right\}$$

$$\{\dots\} = 1$$

$$P_N x_N = \varkappa_N P_{N-1} x_N$$

wstawiamy do (1)

$$\begin{aligned}a_N &= a_{N-1} + P_N x_N (y_N - x_N^T a_{N-1}) \\ P_N &= P_{N-1} - \frac{P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1}}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N}\end{aligned}$$

warunki początkowe

$$a_0 = 0, P_0 = \text{diag}[10^3 \div 10^5]$$

**zaleta:** algorytm pracuje bez odwracania macierzy