7b.
Identyfikacja liniowych obiektów dynamicznych metodą najmniejszych kwadratów

1. Identyfikacja liniowych systemów dynamicznych z czasem dyskretnym

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + ... + \alpha_n x_{k-n} = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + ... + \beta_m u_{k-m}, \tag{1}$$

gdzie wartości rzędów n i m są znane.
Po wprowadzeniu operatora $q = z^{-1}$ przesuwającego wstecz (tzn. $qx_k = x_{k-1}$, $q^2 x_k = x_{k-2}$ itd.) oraz wielomianów

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + ... + \alpha_n q^n, \\ B(q) &= \beta_0 + \beta_1 q + ... + \beta_m q^m, \end{aligned}$$

równanie (1) upraszcza się do postaci

$$A(q)x_k = B(q)u_k \qquad \rightarrow \qquad x_k = \frac{B(q)}{A(q)} u_k.$$

2. Identyfikacja w warunkach bez zakłóceń pomiarowych

$$\theta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)^T$$

$$r_k = (-x_{k-1}, -x_{k-2}, ..., -x_{k-n}, u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-m})^T,$$

$$x_k = r_k^T \theta.$$

Nieznane parametry zawarte w wektorze θ identyfikuje się na podstawie par pomiarów (u_k, x_k).
Zapiszmy

$$R_N = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ r_N^T \end{bmatrix}, \qquad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}.$$

$$X_N = R_N\theta, \tag{2}$$

$$R_N^T X_N = R_N^T R_N \theta, \qquad (\theta \text{ – niewiadome}), \tag{3}$$

warunek jednoznaczności rozwiązania

$$\det R_N^T R_N \neq 0$$

$$\text{rank} R_N = \dim \theta.$$

warunek konieczny

$$N \geq \dim \theta. \tag{4}$$

$$\theta = (R_N^T R_N)^{-1} R_N^T X_N.$$

3. Identyfikacja w obecności zakłóceń pomiarowych

Cel: estymacja wektora parametrów $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)^T$ na podstawie pomiarów we–wy $\{(u_k, y_k)\}_{k=1}^N$, gdzie $y_k = x_k + \varepsilon_k$. Do prawdziwego (niedostępnego dla pomiarów) wyjścia obiektu x_k dodają się przypadowe zakłócenia ε_k

- o zerowej wartości oczekiwanej $\mathbf{E}\varepsilon_k = 0$,
- skończonej wariancji $var\varepsilon_k < \infty$,
- niezależne od procesu wejściowego u_k

Zapisujemy

$$x_k = y_k - \varepsilon_k = \frac{B(q)}{A(q)} u_k \qquad / \cdot A(q)$$

i otrzymujemy równanie różnicowe o zmiennych y i u

$$A(q)y_k = B(q)u_k + z_k.$$

$$z_k = A(q)\varepsilon_k = \varepsilon_k + \alpha_1\varepsilon_{k-1} + \alpha_2\varepsilon_{k-2} + ... + \alpha_n\varepsilon_{k-n},$$

z_k nie jest szumem białym, gdyż jego autokorelacja dla $|\tau| \leq n$ jest niezerowa

$$\mathbf{E}z_k z_{k-\tau} \neq 0.$$

Po wprowadzeniu rzeczywistego regresora (uogólnionego wektora wejść)

$$\phi_k = (-y_{k-1}, -y_{k-2}, ..., -y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-m})^T$$

oraz macierzy uogólnionych wejść, wektora wyjść i zakłóceń

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix}, \qquad Y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad Z_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix},$$

równanie pomiarów przyjmuje postać

$$Y_N = \Phi_N\theta + Z_N,$$

gdzie θ jest niewiadomym wektorem stałych parametrów, a Z_N – nieznanym zakłóceniem losowym.

$$Y_N = \Phi_N\theta \text{ – w ogólności sprzeczny}$$

estymator metodą najmniejszych kwadratów

$$\widehat{\theta} = (\Phi_N^T\Phi_N)^{-1}\Phi_N^T Y_N,$$

błąd estymacji

$$\begin{aligned}
\Delta &= \widehat{\theta} - \theta = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Y_N - \theta = \\
&= (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T \Phi_N \theta + (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Z_N - \theta = \\
&= (\frac{1}{N} \Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \frac{1}{N} \Phi_N^T Z_N.
\end{aligned}$$

Ponieważ proces wyjściowy jest ergodyczny

$$\frac{1}{N} \Phi_N^T Z_N \to \mathbf{E} \phi_k z_k = \mathbf{E} \begin{bmatrix} -y_{k-1} \\ \vdots \\ -y_{k-n} \\ u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-m} \end{bmatrix} z_k$$

z prawdopodobieństwem 1, gdy $N \to \infty$. Skorelowanie procesu $\{z_k\}$ powoduje, że

$$\mathbf{E} \phi_k z_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{E} y_{k-1} z_k \\ \vdots \\ -\mathbf{E} y_{k-n} z_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Zwiększanie liczby pomiarów nie doprowadzi nas do prawdziwych wartości parametrów. W celu pokonania tej trudności, stosuje się techniki oparte na filtracji zakłóceń lub tzw. metodę zmiennych instrumentalnych

4. Matoda uogólnionych najmniejszych kwadratów – estymator Gaussa-Markova

Ponieważ macierz kowariancji zakłóceń

$$\mathrm{cov}(Z_N) = \mathbf{E} Z_N Z_N^T$$

jest dodatnio określona, podlega ona tzw. twierdzeniu o faktoryzacji.

Twierdzenie 1 *Każdą dodatnio określoną i symetryczną macierz* $\mathbf{M}$ *można przedstawić w postaci*

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$$

gdzie $\mathbf{P}$ *jest macierzą nieosobliwą (nazywaną pierwiastkiem macierzy* $\mathbf{M}$*).*

Zatem można zapisać

$$\mathrm{cov}(Z_N) = P \cdot P^T \overset{ozn.}{=} C$$

Mnożymy lewostronnie równanie pomiarów przez P^{-1} (**tzw. filtr wybielający**)

$$P^{-1} Y_N = P^{-1} \Phi_N \theta + P^{-1} Z_N$$

i oznaczamy

$$\overline{Y}_N = P^{-1} Y_N, \qquad \overline{\Phi}_N = P^{-1} \Phi_N, \qquad \overline{Z}_N = P^{-1} Z_N,$$

otrzymujemy wówczas równanie

$$\overline{Y}_N = \overline{\Phi}_N \theta + \overline{Z}_N$$

Na czym polega wybielanie?

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \overline{Z}_N \overline{Z}_N^T &= \mathbf{E} P^{-1} Z_N Z_N^T P^{-1^T} = P^{-1} \left(\mathbf{E} Z_N Z_N^T \right) P^{-1^T} = P^{-1} P \cdot P^T P^{-1^T} = I \\ \mathbf{E} \overline{Z}_N \overline{Z}_N^T &= I \qquad (I \text{ – macierz jednostkowa}), \end{aligned}$$

a zatem elementy $\overline{Z}_N$ tworzą dyskretny biały szum. Uogólniony estymator parametrów metodą najmniejszych kwadratów ma postać

$$\begin{aligned}\widehat{\theta_{GLS}} &= (\overline{\Phi}_N^T \overline{\Phi}_N)^{-1} \overline{\Phi}_N^T \overline{Y}_N \\ \widehat{\theta_{GLS}} &= (\Phi_N^T P^{-1^T} P^{-1} \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T P^{-1^T} P^{-1} Y_N = (\Phi_N^T C^{-1} \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T C^{-1} Y_N\end{aligned}$$

Zaleta: Jest on estymatorem najlepszym spośród wszystkich estymatorów liniowych, gdyż w tej klasie cechuje go minimalna macierz kowariancji.

Wada: Wymagane jest jednoczesne (naprzemienne) modelowanie budowy korelacyjnej zakłóceń. Przykładowe metody (o ograniczonym zakresie stodowalności) – patrz [Nahorski, Mańczak, 1983]