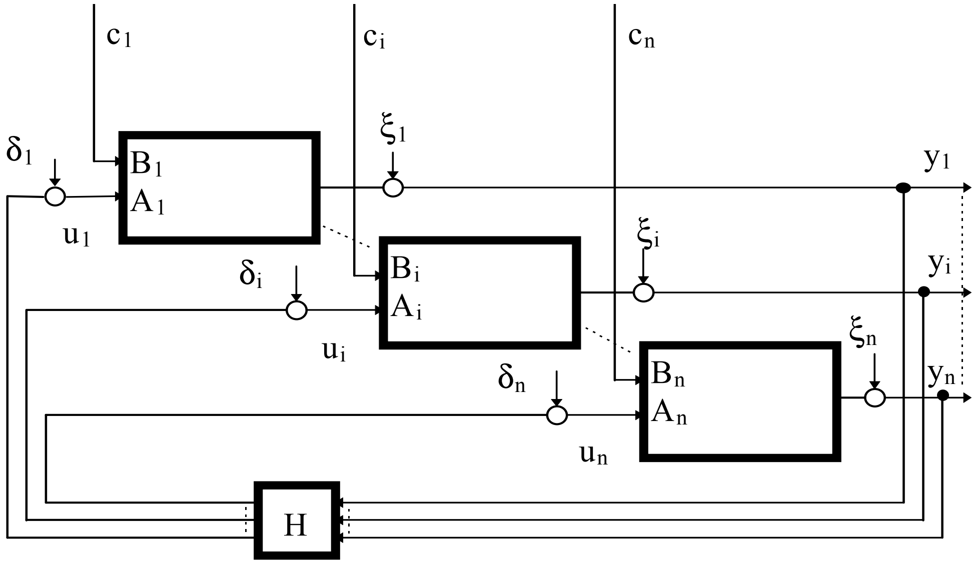
# 7a.

# IDENTYFIKACJA LINIOWYCH SYSTEMÓW STATYCZNYCH
# O ZŁOŻONEJ STRUKTURZE
# ZASTOSOWANIE METODY ZMIENNYCH INSTRUMANTALNYCH

- system składa się z wielu elementów, obiekty (podsystemy) wchodzące w skład systemu są ze sobą połączone i wzajemnie od siebie zależne
- mogą wystąpić ograniczenia w dostępności pomiarowej sygnałów
- identyfikowalność pojedynczych obiektów prostych wchodzących w skład systemu nie implikuje identyfikowalności całego systemu (w szczególności, że identyfikowalność parametrów systemu złożonego w warunkach deterministycznych zależy m.in. od wartości parametrów poszczególnych obiektów (podsystemów), których nie znamy oraz od struktury połączeniowej systemu)
- ewentualne sprzężenia zwrotne przenoszą zakłócenia wyjściowe na wejścia

## Obiekt identyfikacji




$$y=\left(y_1^T,\ldots,y_n^T\right)^T \qquad u=\left(u_1^T,\ldots,u_n^T\right)^T \qquad c=\left(c_1^T,\ldots,c_n^T\right)^T$$

$$A=diag\left(A_1,\ldots,A_n\right) \qquad B=diag\left(B_1,\ldots,B_n\right)$$

$$H=\left(H_1^T,\ldots,H_n^T\right)^T$$

$$\delta=\left(\delta_1^T,\ldots,\delta_n^T\right)^T \qquad \xi=\left(\xi_1^T,\ldots,\xi_n^T\right)^T$$

Opis formalny systemu

$$y = A\,u + B\,c + \xi$$

$$u = H\,y + \delta$$

**Założenia**

**Z1:** macierz połączeń H (struktura systemu) jest znana;

**Z2:** system jest dobrze określony, tzn. dla każdej wartości pobudzenia $c$ i każdej wartości zakłóceń $(\delta, \xi)$ istnieje dokładnie jedna wartość wyjścia $y$;

**Z3:** wartości $c$ i $y$ w dowolnym momencie mogą być zmierzone;

**Z4:** system przy braku zakłóceń byłby identyfikowalny;

**Z5:** zakłócenia $\xi$ i $\delta$ mają zerowe wartości oczekiwane i są niezależne od siebie oraz od pobudzeń $c$;

**Z6:** wartości $c$, $\delta$ i $\xi$ są takie, że uogólniona macierz pobudzeń

$$E_N = \left[e^1, \ldots, e^N\right]$$

gdzie $e = (c^T, \theta^T)^T$ oraz $\theta = A\delta + \xi$ jest zagregowanym zakłóceniem przeniesionym na wyjście systemu, jest - dla $N \geq dim\, e$ - pełnego rzędu z prawdopodobieństwem 1, tj. $rank\, E_N = dim\, e$.

**Cel**

odkrycie prawdziwych wartości współczynników w liniowych opisach każdego obiektu wchodzącego w skład systemu (zawartych w macierzach $A$ i $B$) na podstawie pomiarów $c^k$ i $y^k$ ($k$=1..$N$) uzyskanych w eksperymencie.

**Opis kompaktowy (równania pomiarów)**

$$y = K c + G \theta$$

gdzie

$$G = (I - A H)^{-1} \qquad\qquad K = G B$$

## Estymacja metodą najmniejszych kwadratów

$$V_{iN} = \left(A_i, B_i\right) W_{iN} + \Theta_{iN} \qquad \text{gdzie } \Theta_{iN} = \left(\theta_i^1, \ldots, \theta_i^N\right)$$

$$V_{iN} W_{iN}^T = \left(A_i, B_i\right) W_{iN} W_{iN}^T + \Theta_{iN} W_{iN}^T$$

$$\boxed{\left(A_{iN}, B_{iN}\right) = V_{iN} W_{iN}^T \left(W_{iN} W_{iN}^T\right)^{-1}}$$

gdzie

$$V_{iN} = \left[v_i^1, \ldots, v_i^N\right] \qquad W_{iN} = \left[w_i^1, \ldots, w_i^N\right]$$

$$w_i^k = \left(\tilde{u}_i^{k\,T}, c_i^{k\,T}\right)^T \qquad \tilde{u}_i^k = H_i v^k$$

$v^k$ jest wynikiem pomiaru wyjścia $y^k$

*Przypadek 1)* brak zakłóceń pomiarowych: $v^k = y^k$,

*Przypadek 2)* obecność zakłóceń pomiarowych: $v^k = y^k + \eta^k$.

**Zasadnicza wada estymatora**

asymptotycznie obciążony

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{E}\left(A_{iN}, B_{iN}\right) \neq (A_i, B_i)$$

przyczyna: występowanie strukturalnego sprzężenia zwrotnego w systemie, a co za tym idzie – skorelowanie zachodzące pomiędzy zakłóceniami (zagregowanymi) $\theta_i$, działającymi na wyjścia podsystemów, a wejściami interakcyjnymi $u_i$, które zależą od wyjść systemu.

## Metoda zmiennych instrumentalnych (Instrumental Variables)

$$\boxed{\left(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}\right) = V_{iN}\Psi_{iN}^{T}\left(W_{iN}\Psi_{iN}^{T}\right)^{-1}}$$

**W1:** wymiarowość $\Psi_{iN}$ jest identyczna jak wymiarowość macierzy $W_{iN}$:

$$\Psi_{iN} = \left[\psi_i^1, \ldots, \psi_i^N\right] \qquad \psi_i^k = \left(\psi_{i,1}^{k\;T}, \psi_{i,2}^{k\;T}\right)^T$$

gdzie

$$\dim \psi_{i,1} = \dim u_i$$

$$\dim \psi_{i,2} = \dim c_i$$

**W2:** macierz $W_{iN}\Psi_{iN}^{T}$ jest odwracalna (nieosobliwa);

**W3:** elementy $\psi^1_{i,1},\ldots,\psi^N_{i,1}$ i $\psi^1_{i,2},\ldots,\psi^N_{i,2}$ macierzy $\Psi_{iN}$ są asymptotycznie silnie *skorelowane* z wejściami zewnętrznymi $c^1, \ldots, c^N$;

**W4:** elementy $\psi^1_{i,1},\ldots,\psi^N_{i,1}$ i $\psi^1_{i,2},\ldots,\psi^N_{i,2}$ macierzy $\Psi_{iN}$ są asymptotycznie *nieskorelowane* z zakłóceniami $\theta^1,\ldots, \theta^N$ działającymi na wyjścia podsystemów.

### Konstrukcja zmiennych pomocniczych

Oznaczmy przez $L_i$ macierz formującą $\Psi_{iN}$ z macierzy pobudzeń zewnętrznych systemu $E_N$

$$\Psi_{iN} = L_i E_N$$

Postulat (względu na warunki W3 i W4 oraz niedostępność pomiarową wektora $\theta$)

$$L_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i & 0 \\ I_i & 0 \end{bmatrix}$$

$\Gamma_i$ jest macierzą o wymiarze $\dim u_i \times \dim c$, o której zakładamy, że jest pełnego rzędu
$I_i$ jest macierzą blokową o wymiarach $\dim c_i \times \dim c$, z jednostkowym $i$-tym blokiem kolumnowym:

$$I_i = [0, \ldots, 0, I, 0, \ldots, 0]$$

**Własności asymptotyczne (przypadek braku zakłóceń pomiarowych)**

$$V_{iN} = (A_i, B_i) W_{iN} + \Theta_{iN} \quad / \cdot \Psi_{iN}^T$$

błąd estymacji

$$\left(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}\right) - (A_i, B_i) = \Theta_{iN} \Psi_{iN}^T \left(W_{iN} \Psi_{iN}^T\right)^{-1} \qquad \Delta_N = \tfrac{1}{N} \Theta_{iN} \Psi_{iN}^T \left(\tfrac{1}{N} W_{iN} \Psi_{iN}^T\right)^{-1}$$

zapiszmy

$$W_{iN} = F_i E_N \qquad \text{,gdzie} \qquad F_i = \begin{bmatrix} H_i K & H_i G \\ I_i & 0 \end{bmatrix}$$

na podstawie warunków W1÷W4 oraz mocnego prawa wielkich liczb otrzymujemy:

$$\tfrac{1}{N} \Theta_{iN} \Psi_{iN}^T - p.1 \rightarrow [0 \ \ : \ \ 0]$$

$$\tfrac{1}{N} W_{iN} \Psi_{iN}^T - p.1 \rightarrow \begin{bmatrix} \Sigma_{\tilde{u},\psi_1}^i & \Sigma_{\tilde{u},c}^i \\ \Sigma_{c,\psi_2}^i & \Sigma_{c,c}^i \end{bmatrix}$$

gdzie $\Sigma_{x,y}^i$ oznacza macierz korelacji wzajemnej pomiędzy wektorami losowymi $x_i$ *i* $y_i$
**Wniosek**

$$\left(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}\right) - p.1 \rightarrow (A_i, B_i)$$

## Optymalna generacja zmiennych instrumentalnych

$$\| \mathrm{E}\{ \Delta_N{}^T \Delta_N \} \|_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,1}^{k}{}^{*} &= \mathrm{E}\left(u_i^k \,|\, c = c^k\right) = H_i K c^k \\ \psi_{i,2}^{k}{}^{*} &= c_i^k \end{aligned} \qquad k=1..N \qquad (9)$$

Uwaga: macierz $K$ jest nieznana

# Wyniki eksperymentów