Metody dekompozycji macierzy stosowane w automatyce

Grzegorz Mzyk

Politechnika Wrocławska, Wydział Elektroniki

23 lutego 2015

Plan wykładu

Wprowadzenie

$$Ax = b$$

$$Y_N = \Phi_N \theta^* + Z_N$$

$$Y_N = \Phi_N \theta$$

Rozkład LU

$$A = LU$$

$$Ax = b \qquad \longrightarrow \qquad LUx = b$$

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}$$

Rozkład spektralny

Twierdzenie

Każdą dodatnio określoną i symetryczną macierz A można przedstawić w postaci

$$A = PP^T$$

gdzie P jest macierzą nieosobliwą (nazywaną pierwiastkiem macierzy A).

Dowód

Oznaczmy

$$\begin{array}{lcl} w_i \text{ – wektory własne macierzy } A, & i & = & 1, 2, ..., s \\ \lambda_i \text{ – wartości własne macierzy } A, & i & = & 1, 2, ..., s \end{array}$$

własność

$$Aw_i = \lambda_i w_i$$

Dowód (c.d.)

oznaczając

$$W = [w_1, w_2, ..., w_s] \; oraz \; \Lambda = diag(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. \\ .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & \lambda_s \end{bmatrix}$$

ponieważ macierz A jest symetryczna, to

$$\lambda_i \text{ -- rzeczywiste}$$
$$w_i \text{ -- parami ortogonalne}$$

ponieważ macierz A jest dodatnio określona ($A > 0$), to

$$\lambda_i > 0 \text{ dla każdego } i = 1, 2, ..., s$$

Dowód (c.d.)

wniosek

$$\begin{aligned} & W \text{ -- } \textit{macierz ortogonalna} \\ W^T W &= I \Longrightarrow W^{-1} = W^T \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} AW &= W\Lambda \\ A &= W\Lambda W^{-1} = W\Lambda W^T \ (\textit{tzw. rozkład spektralny macierzy}) \end{aligned}$$

oznaczając

$$\Lambda = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}, \ \textit{gdzie} \ \Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & .. \\ .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & \sqrt{\lambda_s} \end{bmatrix}$$

Dowód (c.d.)

otrzymujemy

$$W\Lambda W^T = W\Lambda^{1/2}\left(W\Lambda^{1/2}\right)^T$$

stąd

$$A = PP^T,\ gdzie\ P = W\Lambda^{1/2}\ (c.k.d.)\ \blacksquare$$

Rozkład Cholesky'ego

inny rozkład dodatnio określonej, symetrycznej macierzy kwadratowej A

$$A = LDL^T$$

gdzie

$$L \text{ – macierz trójkątna dolna,} \qquad D = \mathrm{diag}(d_i),\ d_i > 0$$

stąd

$$\begin{aligned} A &= LD^{1/2}D^{1/2}L^T \\ \text{gdzie } D^{1/2} &= \mathrm{diag}(\sqrt{d_i}) \end{aligned}$$

przyjmując oznaczenie

$$\overline{L} = LD^{1/2}$$

otrzymujemy

$$A = \overline{L}\overline{L}^T$$

Schemat metody obliczeniowej

$$Ax = b \qquad \rightarrow \qquad \overline{L}\overline{L}^T x = b$$

Etap 1.
oznaczając $\alpha = \overline{L}^T x$ rozwiązujemy równanie "zewnętrzne"

$$\overline{L}\alpha = b$$

Etap 2.
dla wartości α z etapu 1 rozwiązujemy równanie "wewnętrzne"

$$\overline{L}^T x = \alpha$$

Zalety metody
1) prostota operacji przy rozwiązywaniu równań
Etap 1 – met. podstawiania "od góry", Etap 2 – met. podstawiania "od dołu"
2) dobre uwarunkowanie zadania, gdyż $\det \overline{L} = \sqrt{\det A}$, zatem dla $0 < \det A < 1$

$$\det \overline{L} = \det \overline{L}^T > \det A$$

Rozkład QR

$$A = QR \qquad\qquad (m \times n)$$

Q – macierz ortogonalna $(m \times m)$,

R – macierz trójkątna górna $(m \times n)$

$$Ax = b \qquad \rightarrow \qquad QRx = b \qquad \rightarrow \qquad Rx = Q^T b$$

Metoda odbić Householdera

Definicja

Macierzą odbicia Householdera nazywamy macierz postaci

$$P = I - 2ww^T$$

gdzie $\|w\| = 1$, *tj.* $w^T w = 1$.

Interpretacja

$$Pw = (I - 2ww^T)w = w - 2ww^T w = w - 2w = -w$$

Własności:

(i) $P = P^T$ (symetria)

(ii) $P^T P = PP^T = I$ (ortogonalność)

(iii) dla każdego wektora x istnieje macierz P_j, taka że

$$P_j x = \pm \|x\| \, e_j, \text{ gdzie } e_j \text{ jest } j\text{-tym wersorem } e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iiii) dla ciągu macierzy Householdera $P_1, P_2, ..., P_s$ przekształcenie złożenia

$$\Psi = P_s \cdot P_{s-1} \cdot ... \cdot P_2 \cdot P_1$$

jest macierzą ortogonalną, tj.

$$\Psi^T \Psi = I$$

Lemat

Dla każdej macierzy A istnieje taki ciąg macierzy Householdera $\{\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, ..., \widetilde{P}_s\}$, że przekształcenie złożone

$$\Psi = \widetilde{P}_s \widetilde{P}_{s-1}, ... \widetilde{P}_2 \widetilde{P}_1$$

ma własność

$$\Psi A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie R jest macierzą trójkątną górną.

Twierdzenie

Oszacowanie NK wektora x jest równoważne rozwiązaniu układu równań

$$Rx = \eta_R$$

gdzie η_R jest wektorem zawierającym pierwsze elementy wektora ΨY_N.

Dowód

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \|Ax - b\|_e^2 \to \min_x \\
Q(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) = \\
&= [\Psi Ax - \Psi b]^T [\Psi Ax - \Psi b] = \\
&= [\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} \eta_R \\ \eta_z \end{bmatrix}]^T [\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} \eta_R \\ \eta_z \end{bmatrix}] = \\
&= \begin{bmatrix} Rx - \eta_R \\ -\eta_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Rx - \eta_R \\ -\eta_z \end{bmatrix} = \\
&= (Rx - \eta_R)^T (Rx - \eta_R) + \eta_z^T \eta_z = \\
&= \|Rx - \eta_R\|_e^2 + \|\eta_z\|_e^2 \to \min_a
\end{aligned}
$$

zatem

$$
Q(x) \to \min_x \Rightarrow Rx = \eta_R
$$

Rozkład wg wartości szczególnych (SVD)

Definicja

Wartościami szczególnymi macierzy A nazywamy pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy $A^T A$.

Twierdzenie

Dowolną macierz A o rozmiarach $m \times n$ można wyrazić w postaci

$$A = PDQ$$

gdzie P i Q są macierzami unitarnymi stopnia $m \times m$ i $n \times n$, zaś D jest macierzą przekątniową o rozmiarach $m \times n$.

Wnioski z dowodu [Kincaid, Cheney, str. 277]:
1) tylko $r = rank(A)$ pierwszych elementów diagonali macierzy D jest niezerowych
2) zmieniając kolejność tych elementów można uzyskać $r!$ różnych rozkładów SVD dla tej samej macierzy A

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja

Pseudoodwrotnością macierzy diagonalnej D rozmiaru $m \times n$, czyli takiej że

$$D[i,j] := \begin{cases} \sigma_i, \text{ dla } i = j \leqslant rank(A) \\ 0, \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

nazywamy macierz D^+ rozmiaru $n \times m$ postaci

$$D^+[i,j] := \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i}, \text{ dla } i = j \leqslant rank(A) \\ 0, \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Przykład

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad D^+ = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DD^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^+D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja

Pseudoodwrotnością dowolnej macierzy $A = PDQ$ nazywamy macierz

$$A^+ = Q^T D^+ P^T$$

mamy układ równań – może być sprzeczny, może mieć wiele rozwiązań

$$Ax = b$$

oznaczmy

$$\rho = \min_x \|Ax - b\|_2$$

Definicja

Rozwiązaniem minimalnym układu równań $Ax = b$ nazywamy najkrótszy (w sensie euklidesowym) wektor minimalizujący $\|Ax - b\|_2$, czyli należący do zbioru

$$\{x : \|Ax - b\|_2 = \rho\}$$

Możliwe przypadki

Sprzeczny?	Liczba rozwiązań	Rozw. minimalne $=$
nie, $\rho = 0$	1	jedyne rozw.
nie, $\rho = 0$	∞	najkrótsze rozw.
tak, $\rho > 0$	0 (jedno rozw. NK)	jedyne rozw. NK
tak, $\rho > 0$	0 (∞ wiele rozw. NK)	najkrótsze rozw. NK

Twierdzenie

Rozwiązanie minimalne układu równań $Ax = b$ ma postać

$$x = A^+ b$$

Zastosowanie

$$\begin{aligned} X_N\theta &= Y_N \text{ – w ogólności sprzeczny} \\ X_N &= PDQ \\ \widehat{\theta} &= X_N^+ Y_N = Q^T D^+ P^T Y_N \end{aligned}$$

Literatura

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza Numeryczna*, WNT, Warszawa, 2006.
- A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna Algebra Liniowa: Wprowadzenie do Obliczeń Zautomatyzowanych*, WNT, Warszawa, 1992.
- T. Kaczorek, *Wektory i Macierze w Automatyce i Elektrotechnice*, WNT, Warszawa, 1998.