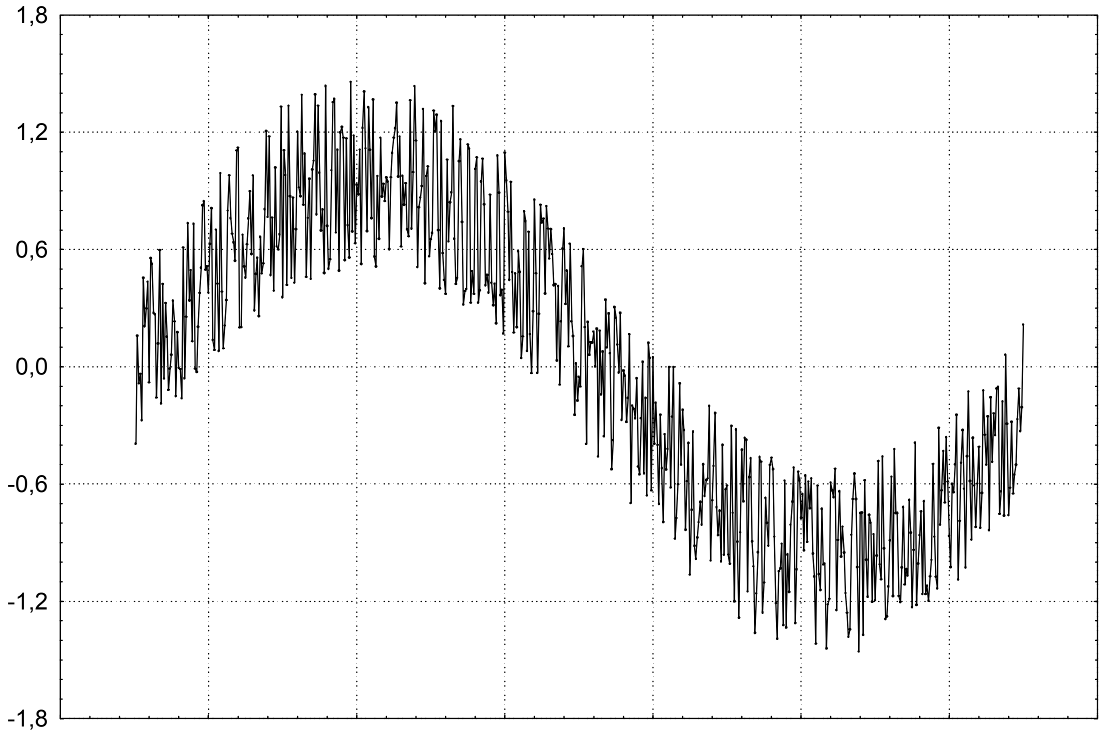
1. Proces stochastyczny

Przykład 1

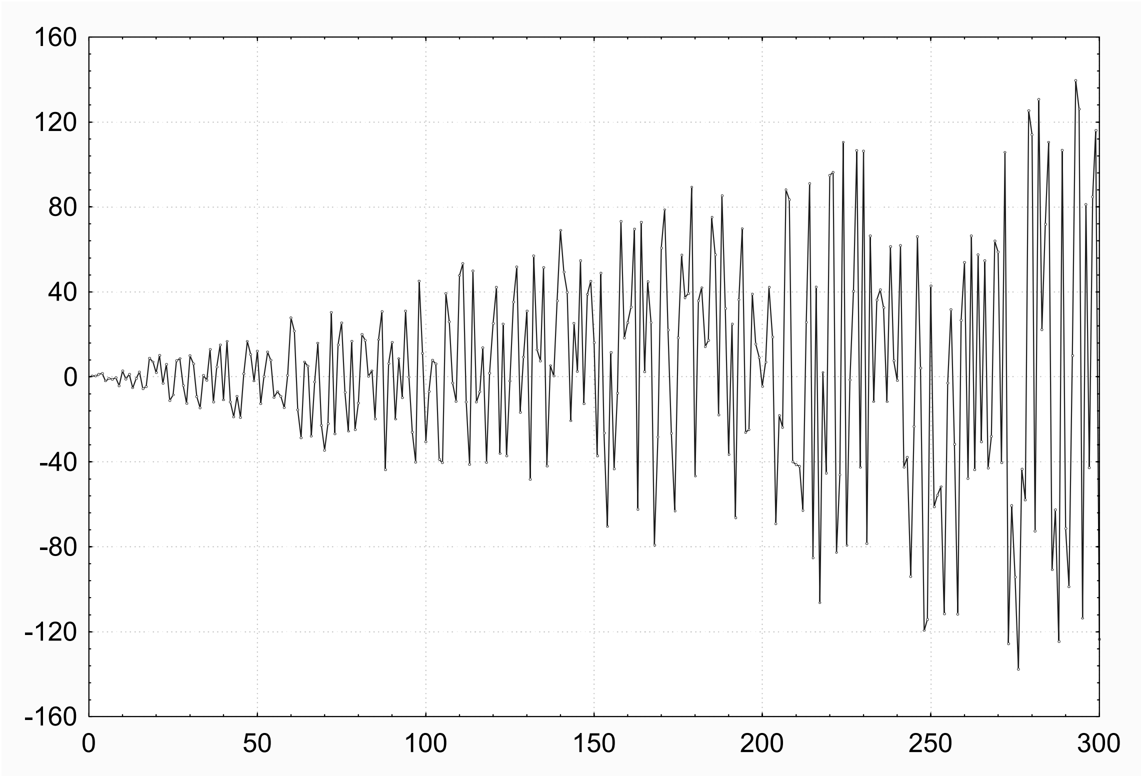
$$X(t,\omega) = \sin ct + u(\omega),\text{ gdzie } c = const,\text{ natomiast } u(\omega)\tilde{\ }U[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \text{ – losowe}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X(t,\omega) &= \mathbf{E}\{\sin ct + u(\omega)\} = \mathbf{E}\{\sin ct\} + \mathbf{E}\{u(\omega)\} = \sin ct \text{ – funkcja czasu} \\
var X(t,\omega) &= var\{\sin ct + u(\omega)\} = var\{u(\omega)\} = \frac{1}{12} = const \text{ – nie zależy od czasu}
\end{aligned}$$

Przykład 2

$$X(t,\omega) = u(\omega,t), \text{ gdzie } c = const, \text{ natomiast } u(\omega,t)\tilde{\ }U[\frac{-t}{2},\frac{t}{2}] \text{ – losowe}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{E}X(t,\omega) &= 0 = const \text{ – nie zależy od czasu} \\ varX(t,\omega) &= \frac{(\frac{t}{2} - (-\frac{t}{2}))^2}{12} = \frac{t^2}{12} \text{ – funkcja czasu} \end{aligned}$$

2. Stacjonarność (w szerokim sensie)

momenty drugiego rzędu nie ulegają zmianie w czasie

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X(t,\omega) &= m = const, \text{ dla każdego } t \\
var X(t,\omega) &= \sigma_x^2 = const, \text{ dla każdego } t \\
A_X(t_1,t_2) &= A_X(t_2-t_1), \text{ dla każdego } t_1 \text{ i } t_2
\end{aligned}
$$

3. Ścisła stacjonarność (w węższym sensie)

probabilistyczne charakterystyki procesu (wielowymiarowe gęstości) nie ulegają zmianie w czasie

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= f_t(x) = f(x), \text{ dla każdego } t \\
f(x_1,x_2;t_1,t_2) &= f_{t_1,t_2}(x_1,x_2) = f_{t_1+\tau,t_2+\tau}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2;t_2-t_1) \\
f(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3) &= f_{t_1+\tau,t_2+\tau,t_3+\tau}(x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}
$$

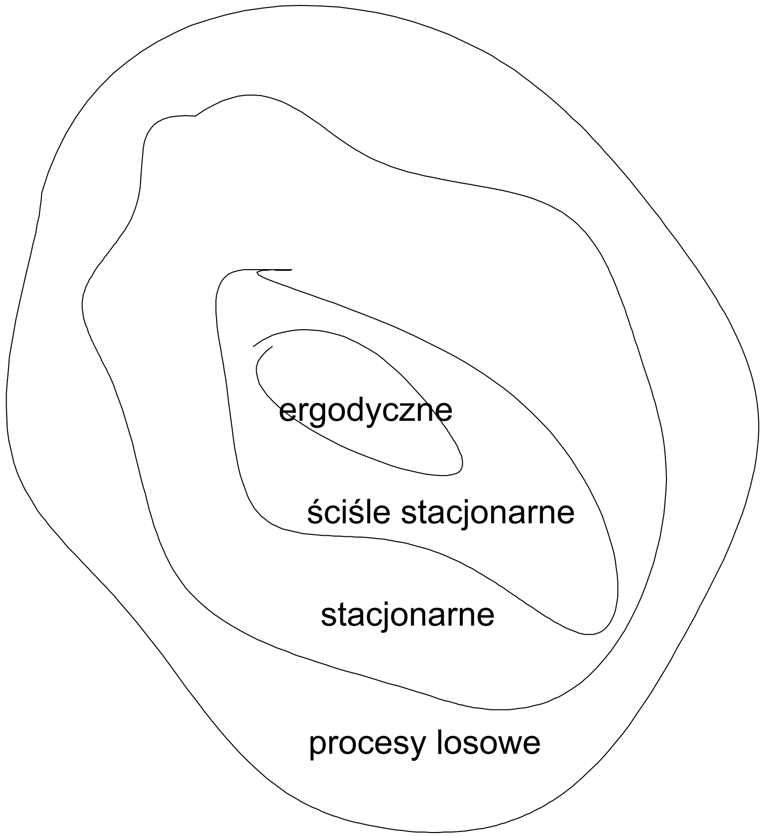
4. Ergodyczność

zachodzą następujące równości (z prawdopodobieństwem 1)

$$
\mathbf{E}X(\omega,t) = m \overset{p.1}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt, \text{ gdzie } x(t) \text{ jest dowolną realizacją procesu}
$$

dalej, dla uproszczenia prezentacji, niech $m = 0$ (proces scentrowany)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X^2(\omega,t) &= \sigma_x^2 \overset{p.1}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt \\
A_X(\tau) &= \mathbf{E}\{X(\omega,t)X(\omega,t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt
\end{aligned}
$$



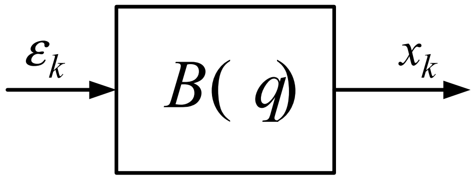
5. Typowe modele parametryczne procesów losowych

ruchoma średnia (*ang. moving average*) rzędu l, ozn. *MA(l)*

$$x_k = \beta_0 \varepsilon_k + \beta_1 \varepsilon_{k-1} + ... + \beta_l \varepsilon_{k-l}, \text{ gdzie } \{\varepsilon_k\} \text{ – biały szum}$$

$q = z^{-1}$ – operator przesunięcie "wstecz"

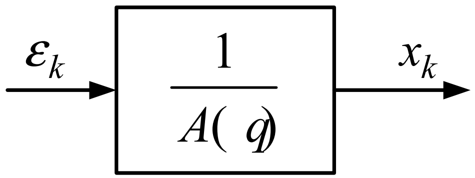
$$\begin{aligned} B(q) &= \beta_0 + \beta_1 q + ... + \beta_l q^l \\ x_k &= B(q)\varepsilon_k \end{aligned}$$



autoregresja (*ang. autoregression*) rzędu m, ozn. *AR(m)*

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-2} + ... + \alpha_1 x_{k-m} = \varepsilon_k$$

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + \alpha_1 q + ... + \alpha_m q^m \\ A(q)x_k &= \varepsilon_k \\ x_k &= \frac{1}{A(q)}\varepsilon_k \end{aligned}$$



autoregresja z ruchomą średnią – *ARMA(m,l)*

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-2} + ... + \alpha_1 x_{k-m} = \beta_0 \varepsilon_k + \beta_1 \varepsilon_{k-1} + ... + \beta_l \varepsilon_{k-l}$$

$$A(q)x_k = B(q)\varepsilon_k$$

$$x_k = \frac{1}{A(q)} B(q)\varepsilon_k$$