11.
Rozkład SVD według wartości szczególnych
(ang. singular value decomposition)

1. Podstawy algebraiczne metody

Definicja (wartości własne)

Wartościami własnymi macierzy A nazywamy pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy $A^H A$, gdzie miacierz A^H jest macierzą sprzężoną do A.

Dla macierzy rzeczywistych A zachodzi

$$A^H = A^T$$

Twierdzenie

Dowolną macierz A o rozmiarach $m \times n$ można wyrazić w postaci

$$A = PDQ$$

gdzie P jest macierzą unitarną stopnia $m \times m$, Q jest macierzą unitarną stopnia $n \times n$, zaś D jest macierzą przekątniową o rozmiarach $m \times n$.

Dowód

patrz [Kincaid, Cheney, str. 277]

Wnioski z dowodu:

1) tylko $r = rank(A)$ pierwszych elementów diagonali macierzy D jest niezerowych

2) zmieniając kolejność tych elementów można uzyskać $r!$ różnych rozkładów SVD dla tej samej macierzy A

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja (pseudoodwrotność macierzy diagonalnej)
Pseudoowdrotnością macierzy diagonalnej D rozmiaru $m \times n$, czyli takiej że

$$D[i,j] := \begin{cases} \sigma_i, \text{ dla } i = j \leqslant rank(A) \\ 0, \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

nazywamy macierz D^+ rozmiaru $n \times m$ postaci

$$D^+[i,j] := \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i}, \text{ dla } i = j \leqslant rank(A) \\ 0, \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Przykład

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad D^+ = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DD^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^+D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja (pseudoodwrotność dowolnej macierzy)
Pseudoodwrotnością dowolnej macierzy $A = PDQ$ nazywamy macierz

$$A^+ = Q^H D^+ P^H$$

2. Zastosowanie SVD w zadaniach NK

mamy układ równań – może być sprzeczny, może mieć wiele rozwiązań

$$Ax = b$$

oznaczmy

$$\rho = \min_x \|Ax - b\|_2$$

Definicja (rozwiązanie minimalne)
Rozwiązaniem minimalnym układu równań $Ax = b$ nazywamy najkrótszy (w sensie euklidesowym) wektor minimalizujący $\|Ax - b\|_2$, czyli należący do zbioru

$$\{x : \|Ax - b\|_2 = \rho\}$$

Możliwe przypadki

Czy sprzeczny?	Liczba rozwiązań	Czym jest rozwiązanie minimalne?
nie, $\rho = 0$	1	jedynym rozwiązaniem
nie, $\rho = 0$	∞	najkrótszym rozwiązaniem
tak, $\rho > 0$	0 (jedno rozwiązanie problemu NK)	jedynym rozwiązaniem problemu NK
tak, $\rho > 0$	0 (∞ wiele rozwiązań problemu NK)	najkrótszym z rozwiązań problemu NK

Twierdzenie

Rozwiązanie minimalne układu równań $Ax = b$ ma postać

$$x = A^+ b$$

Aplikacja

$$\begin{aligned} X_N a &= Y_N \text{ – w ogólności sprzeczny} \\ X_N &= PDQ \\ \widehat{a} &= X_N^+ Y_N = Q^T D^+ P^T Y_N \end{aligned}$$